DOI: 10.12737/article_59a93b08e80d99.93176185

Шешенин С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Закалюкина И.М., ассистент
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА*

sheshenin@mech.math.msu.su

Резиновые и резинокордные элементы конструкций выделяют тепло, проявляя тем самым вязкоупругие свойства. Точность вычисления тепловыделения зависит от погрешности аппроксимации функции релаксации. Поскольку тепло выделяется при периодическом процессе изменения напряженно-деформированного состояния, то функцию релаксации желательно определять в эксперименте, воспроизводящем циклическое деформирование. Хорошо известна методика, позволяющая определять основные параметры функции релаксации, заданной в виде линейной комбинации экспонент, с помощью гармонического деформирования. Статический опыт на релаксацию позволяет определить дополнительно длительный модуль. В работе сравниваются обе методики на основе проведенных экспериментов.

Ключевые слова: *резинокорд, линейная вязкоупругость, модель Максвелла, качение, пневматическая шины, тепловыделение.*

Введение. В данной работе сравниваются эти два способа определения параметров линейной модели вязкоупругости на основе экспериментов, проведенных с пластинами из резины, работающей в состоянии растяжения. Приводится сравнение определяемых по этим методикам значений времен релаксации, существенно влияющих на выделяемое тепло.

Прежде всего, следует выбрать аппроксимацию функции релаксации. Как отмечено в [4, 5], было предложено множество вариантов функций аппроксимаций и проводились их сравнения. Ниже показывается, что для вычисления выделяемой энергии эффективным является приближение функции релаксации суммой всего нескольких экспонент. Эта модель может учитывать физическую нелинейность [3, 6, 7].

Механическая модель. Будем считать, что деформированное состояние шины является суммой состояния, возникающего за счет внутреннего давления, и осцилляционных добавок за счет качения. В первом приближении тензор деформаций $\mathbf{E}$ (Лагранжа–Грина) представляется суммой $\mathbf{E}=\mathbf{E}^{\text{infl}}+\mathbf{E}^{\Delta}$, где $\mathbf{E}^{\Delta}$ – добавка, описывающая осцилляции деформаций. Тензор напряжений $\mathbf{S}$ (Пиолы-Кирхгофа) представляется в виде $\mathbf{S}(\mathbf{E}^{\text{infl}}+\mathbf{E}^{\Delta})\approx\mathbf{S}(\mathbf{E}^{\text{infl}})+\mathbf{S}^{\Delta}$, где $\mathbf{S}(\mathbf{E}^{\text{infl}})$ есть напряжение от внутреннего давления, а $\mathbf{S}^{\Delta}$ – отклонение за счет осцилляций.

Осцилляционная добавка является дифференциалом оператора $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ и, следовательно, линейно зависит от $\mathbf{E}^{\Delta}$. Поэтому $\mathbf{S}^{\Delta}$ представляется согласно линейной теории вязкоупругости

$$\mathbf{S}^{\Delta}(\mathrm{t})=\int_0^t\mathbf{R}\left(t-\tau,\mathbf{E}^{\text{infl}}\right):d\mathbf{E}^{\Delta}(\tau) \qquad (1)$$

Здесь подчеркнуто, что $\mathbf{R}$, вообще говоря, зависит от стационарного деформированного состояния $\mathbf{E}^{\text{infl}}$. Определяющее соотношение (1) записано в начальной области. В актуальной области оно определяет связь

$$\boldsymbol{\sigma}^{\Delta}(\mathrm{t})=\int_0^t\mathbf{R}\left(t-\tau,\mathbf{E}^{\text{infl}}\right):d\boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta}(\tau),\quad \boldsymbol{\sigma}^{\Delta}=\left(\mathbf{F}^{\text{infl}}\right)\cdot J\mathbf{S}^{\Delta}\cdot\left(\mathbf{F}^{\text{infl}}\right)^T,\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta}=1/2\left(\nabla\mathbf{u}+\left(\nabla\mathbf{u}\right)^T\right),\ \mathbf{u}=\mathbf{R}-\mathbf{R}^{\text{infl}} \qquad (2)$$

$\mathbf{F}^{\text{infl}}$ – градиент деформации в состоянии, возникающем за счет внутреннего давления, J – якобиан преобразования. В соотношении (2) фактически речь идет об определяющем соотношении между касательным напряжением и сдвиговой деформацией $\sigma^{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathrm{t})=\int_0^t R\left(t-\tau,\mathbf{E}^{\text{infl}}\right):d\varepsilon^{\Delta}_{\alpha\beta}(\tau)$.

Шаровые части напряжений и деформаций либо связаны линейно, либо материал считается несжимаемым [4].

Для экспериментального определения функции релаксации проводились опыты с пластинами из брекерной резины размером $200\text{мм}\times80\text{мм}\times2\text{мм}$, которая используется для изготовления слоев брекера шин легковых автомобилей. Реализовывалось одномерное напряженное состояние, поэтому далее будем иметь дело с определяющим соотношением

$$\sigma(\mathrm{t})=\int_0^t R\left(t-\tau,\varepsilon^0\right)d\varepsilon(\tau) \qquad (3)$$

Учёт зависимости R от начальной деформации ε^0 будет обсуждаться в последующих статьях, поэтому пока будем записывать функцию релаксации просто $R(t)$.

Подчеркнем, что представление комбинацией экспонент обладает преимуществами. Во-первых, необходимая для вычисления выделяемой энергии точность приближения к экспериментальной кривой достигается уже при небольшом числе членов суммы экспонент. Поэтому, во-вторых, определяющее соотношение записывается в дифференциальной форме и решение краевой задачи линейной вязкоупругости вычислительно не многим сложнее решения задачи упругости [3].

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Будем оценивать точность аппроксимации $R(t)$ в норме, которая суть работа деформации за цикл, соответствующей осцилляционной добавке

$$\mathrm{A}(T) = \int_t^{t+T} \sigma(\tau)\, d\varepsilon(\tau), \tag{4}$$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, где T – период колебаний при качении шины, а ω – частота. Итак, пусть

$$R(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n exp\left(-\frac{t}{t_n}\right),$$

$$c_0 = R(\infty),\ c_n = (R(0) - R(\infty))w_n,\ \sum_{n=1}^{N} w_n = 1 \tag{5}$$

Статический опыт. В типичном статическом опыте на релаксацию деформация задается [4] в виде функции Хевисайда $h(t)$. Из приведенных в таблице 1 расчетов можно заключить, что для вычисления выделяемой энергии достаточно аппроксимации экспериментальной кривой релаксации небольшим числом членов представления (5). Работа А вычислялись для процесса деформирования вида

$$\varepsilon(t) = \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_A \sin(\omega \mathrm{t})\right] h(t) \tag{6}$$

с частотой колебаний, соответствующей движению легкового автомобиля с различными скоростями движения автомобиля. Использовалась аппроксимация с двумя и тремя членами суммы (5). Именно, к двум членам суммы (5) был добавлен третий член со временем релаксации в 10 раз больше второго времени релаксации t_2. Первые два времени релаксации также отличались примерно на порядок. Весовой коэффициент поправочного третьего члена равен сумме весовых коэффициентов первых двух членов представления (5). В первой строке Таблицы 1 записаны скорости движения автомобиля, во второй – относительные разницы в энергии, выделяемой за цикл колебаний.

Таблица 1

Погрешность вычисления работы

скорость (км/ч)	0.1	0.5	1	2	5	10	30	100
$\Delta A / A$ (%)	300	27	11	4.3	2	1.5	1.4	1.4

Из таблицы видно, что для практически важных скоростей движения легкового автомобиля добавление третьего члена несущественно изменяет вычисленное значение выделяемой энергии. Однако если у добавочного члена время релаксации меньше по сравнению с первыми двумя, то возникает существенная ошибка. Следовательно, вопрос о том, насколько точно статический опыт на релаксацию позволяет находить наименьшие времена релаксации, требует изучения.

Осциляционный опыт. При деформировании в виде (6) максимальный вклад в выделяемую энергию дает член (5), для которого $t_n\omega \approx 1$. Это видно из выражения (7) для работы за период колебаний, соответствующей n-му члену (5)

$$A_n = \pi c_n \varepsilon_A^2 \frac{t_n\omega}{\left[(t_n\omega)^2 + 1\right]}\ . \tag{7}$$

Поэтому для качения с частотой ω желательно иметь в аппроксимации (5) член с $t_n \approx 1/\omega$.

Поэтому для большой частоты требуется экспериментально находить малые времена релаксации. Для этого лучше приспособлена осцилляционная методика.

Осцилляционная методика определения параметров c_n, t_n состоит в следующем [2]. Осуществляется деформирование согласно (6). Осциллирующая составляющая напряжения равна

$$\sigma(\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \sin(\omega \mathrm{t} + \delta_n),\quad \sigma_n = \varepsilon_A c_n \frac{t_n\omega}{\sqrt{(t_n\omega)^2 + 1}},\quad \cos\delta_n = \frac{t_n\omega}{\sqrt{(t_n\omega)^2 + 1}} \tag{8}$$

а производимая за цикл работа равна

$$A(\omega) = \pi\varepsilon_A^2 \sum_{n=1}^{N} c_n \frac{t_n\omega}{\left[(t_n\omega)^2 + 1\right]} \tag{9}$$

Вычисляя по экспериментальным данным работу $A(\omega)$ для разных частот ω, можно получить значения параметров c_n, t_n, приближая экспериментальную зависимость работы от частоты выражением (9).

Рассмотрим эксперимент, проведенный в НИИ Механики МГУ для частот ω от 0.3 до 15 рад/сек. Результаты измерения времен релаксации показаны в таблице 2. В столбцах с третьего по пятый приведены времена релаксации, полученные: для верхней части указанного выше диапазона частот (третий столбец), для нижней части (четвертый столбец) и, наконец, для всего диапазона (последний столбец). Видно, что диапазон с низкими частотами приводит к обнаружению времен релаксации, близких к тем, что удается определить из статического опыта на релаксацию. Для получения меньших времен требуется использование более высоких частот.

Таблица 2

Времена релаксации

времена релакса-ции	статический опыт	осцилляционные опыты		
	N=2	N=2	N=2	N=3
t1	–	0.038	–	0.050
t2	0.368	0.333	0.354	0.481
t3	3.533	–	3.6	4.030

Выводы. Таким образом, осцилляционная методика позволила определить наименьшее время релаксации, на порядок меньшее, чем минимальное значение, найденное в статическом опыте. Это позволяет использовать найденную аппроксимацию для больших частот колебаний. С другой стороны, статический опыт позволяет измерить длительный модуль и кривую релаксации на длительном временном отрезке. Совокупность опытов двух типов позволяет определить все параметры, необходимые для решения задачи тепловыделения при стационарном и нестационарном качении пневматической шины.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-05887-а).*

Авторы выражают благодарность сотрудникам НИИ Механики МГУ П.В. Чистякову и Ю.П. Зезину за помощь в проведении экспериментов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. Мир. 1974. 339 с.
2. Baumgaertel M., Winter H.H. Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data // RheologicaActa. 28. 1989. Pp. 511–519.
3. Nasdala L., Kaliske M., Becker A., Rothert H. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures // Computational Mechanics. 22. 1998. Pp. 395–403.
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 281 с.
5. Адамов А.А., МатвеенкоВ.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. УрО РАН. 2003. 412 с.
6. Ломакин Е.В., Белякова Т.А., Зезин Ю.П. Нелинейное вязкоупругое поведение наполненных эластомерных материалов // Известия Саратовского университета. 2008. Т.8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып.3.
7. Белкин А.Е., Семенов В.К. Теоретический и экспериментальный анализ контакта массивной шины с беговым барабаном // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 71–82.

Sheshenin S.V., Zakalyukina I.M

STUDY PERFORMANCE SILICA BRICK, MANUFACTURED WITH ALUMINOSILICATE TECHNOGENIC RAW

Rubber and rubber-cord structural elements produce heat, thus exhibiting viscoelastic properties. The accuracy in calculating the heat release depends on the error in the approximation of the relaxation function. Since heat is released during the periodic process of changing the stress/strain state, it is desirable to determine the relaxation function in an experiment reproducing cyclic deformation. A technique is well known that makes it possible to determine the basic parameters of the relaxation function, given in the form of a linear combination of exponentials, by means of harmonic deformation. A static relaxation test allows determining an additional long-term modulus. In the paper, both methods are compared on the basis of the experiments performed.

Keywords: *Rubber cord, linear viscoelasticity, Maxwell model, rolling, pneumatic tires, heat emission.*

Шешенин Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.
Адрес: Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, ГСП-1.
E-mail: sheshenin@mech.math.msu.su

Закалюкина Ирина Михайловна, ассистент.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Адрес: Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.