

Уварова Н.Б., канд. техн. наук, доц.,
 Парамонов Е.Е., студент

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РАСЧЁТУ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛИТ НА ЛОКАЛЬНЫЕ И РАЗРЫВНЫЕ НАГРУЗКИ

evg.paramonov@yandex.ru

Статья посвящена расчету изгибаемой плиты на локальные разрывные нагрузки. Для решения задачи привлекаются обобщенные уравнения метода конечных разностей (МКР). Эти уравнения позволяют решать задачу в пределах интегрируемой области с учетом разрывов искомой функции, ее первой производной и правой части исходного дифференциального уравнения. Разрешающее дифференциальное уравнение С. Жермен-Лагранжа сводится к двум численным аналогам. Полученные уравнения записываются для каждой расчетной точки сетки. Предлагаемая методика иллюстрируется на примере расчета плиты с шарнирным опиранием по контуру и в центральной точке, а также плиты с шарнирным опиранием по контуру и в четырёх точках, которые загружены равномерно распределенной нагрузкой. Результаты расчета при минимальном числе разбиений сравниваются с известным решением С.П. Тимошенко и с решением по МКЭ. Результаты иллюстрируют сходимость численного решения, что свидетельствует о возможности использования данного метода для решения подобных задач.

Ключевые слова: изгибаемая плита, тонкая, изотропная, разрывные нагрузки, локальные, численное решение, обобщенные уравнения метода конечных разностей.

Для расчета тонкой изгибаемой плиты на локальные и разрывные нагрузки в работе использовались обобщенные уравнения метода конечных разностей (МКР). Численное решение сводится к составлению разностных уравнений, которые позволяют учитывать конечные разрывы искомой функции, правой части исходных дифференциальных уравнений, а также – разрывы производных функций. Решены следующие задачи: шарнирно опёртая плита, загруженная равномерно распределённой нагрузкой с опорой в центре и на 4-х опорах. При этом исследовался вопрос сходимости решения. Расчёт проводился при разном числе разбиений. Результаты сравнивались с известным решением [1].

Дифференциальные уравнения изгиба тонкой изотропной плиты [1] запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -p; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -m, \tag{2}$$

где $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{a}$; $m = \frac{M}{q_0 a^2}$; $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$;

$$p = \frac{q}{q_0}; \quad w = \frac{WD}{q_0 a^4};$$

q_0 – интенсивность нагрузки в какой-либо точке; μ – коэффициент Пуассона; D – цилиндрическая жесткость; a – сторона плиты; W – прогиб.

Численные аналоги уравнений (1), (2) [2] на квадратной сетке с шагом h :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{i-1,j} + \tilde{m}_{i,j-1} - 4\tilde{m}_{i,j} + \tilde{m}_{i,j+1} + \tilde{m}_{i+1,j} + \frac{1}{2h} \left({}^{I-II} \Delta m_{ij}^\xi + {}^{III-IV} \Delta m_{ij}^\xi + {}^{I-III} \Delta m_{ij}^\eta + {}^{II-IV} \Delta m_{ij}^\eta \right) = \\ -\frac{1}{4} \left({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij} \right); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\tilde{w}_{i-1,j} + \tilde{w}_{i,j-1} - 4\tilde{w}_{i,j} + \tilde{w}_{i,j+1} + \tilde{w}_{i+1,j} = -\tilde{m}_{i,j}, \tag{4}$$

Часть (фрагмент) сетки, на которой строится решение показана на рис. 1.

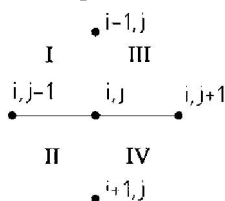


Рис 1. Шаблон с расчётными точками

Безразмерные изгибающие моменты определяются по формулам:

$$\begin{cases} m^{(\xi)} = -(w^{\xi\xi} + \mu w^{\eta\eta}); \\ m^{(\eta)} = -(w^{\eta\eta} + \mu w^{\xi\xi}). \end{cases} \tag{5}$$

$$w_{ij}^{\xi\xi} = h^2 (\tilde{w}_{i-1,j} - 2\tilde{w}_{i,j} + \tilde{w}_{i+1,j}). \tag{6}$$

Для квадратной плиты в центральной точке 1:

$$m^{(\xi)} = m^{(\eta)}; w_{ij}^{\xi\xi} = w_{ij}^{\eta\eta}. \quad (7)$$

Уравнения (1) и (2), записанные для всех внутренних точек плиты с учетом граничных условий, позволяют определить напряженно-деформированное состояние.

1. Рассмотрим квадратную шарнирно опёртую по контуру плиту с опорой в центре на действие равномерно распределённой нагрузки $q=1$. Для решения задачи реакцию, возникающую в колонне, заменим нагрузкой типа «крест» распределённой по линейному закону с максимальной интенсивностью r . Таким образом, задача сводится к расчёту плиты на совместное действие равномерно распределённой нагрузки и нагрузки типа «крест», расположенной в центре и направленной в противоположную сторону. Данная нагрузка будет учтена в виде скачка равного величине r :

$${}^{I-II} \Delta m_{ij}^{\xi} = {}^{III-IV} \Delta m_{ij}^{\xi} = {}^{I-III} \Delta m_{ij}^{\eta} = {}^{II-IV} \Delta m_{ij}^{\eta} = r.$$

При шарнирном опирании на контуре: $w = 0; m = 0$.

Принимаем $h = 1/6$.

Запишем уравнения (3) и (4) для каждой из шести расчетных точек плиты. Прогиб в центральной точке равен нулю, а неизвестной будет являться величина скачка r . Для дальнейших вычислений удобнее точки обозначать одним индексом, расчетная схема показана на рис. 2, в силу симметрии изображена только четверть плиты, на рис. 3 показана центральная часть плиты с изображением нагрузки типа «крест».

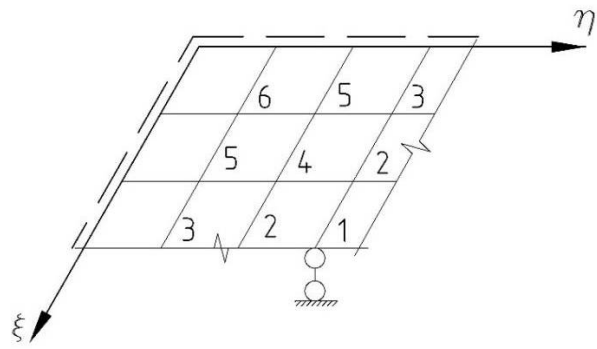


Рис. 2. Четверть расчетной схемы к задаче 1

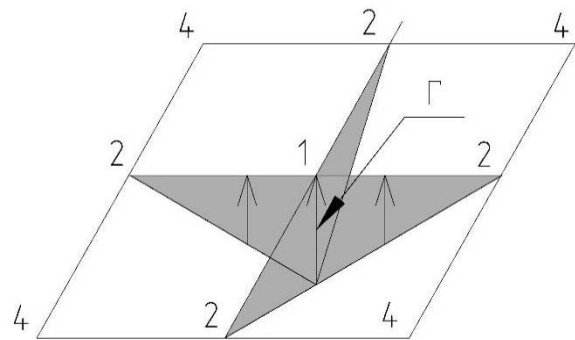


Рис. 3. Аппроксимация реакции в центральной точке

Приведем в качестве иллюстрации решения уравнения (3) и (4) для точек 1 и 2, где $\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} 4 \cdot r$ учитывает полосовую нагрузку.

$$\begin{cases} \tilde{m}_2 + \tilde{m}_2 - 4\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \tilde{m}_2 + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} 4 \cdot r = -1; \\ \tilde{m}_3 + \tilde{m}_4 - 4\tilde{m}_2 + \tilde{m}_4 + \tilde{m}_1 = -1; \\ \dots \\ \tilde{w}_2 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_2 = -\tilde{m}_1; \\ \tilde{w}_3 + \tilde{w}_4 - 4\tilde{w}_2 + \tilde{w}_4 = -\tilde{m}_2; \\ \dots \end{cases} \quad (8)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= -2,4521; \tilde{m}_2 = 0,1513; \tilde{m}_3 = 0,6605; \tilde{m}_4 = 0,6983; \tilde{m}_5 = 0,7454; \tilde{m}_6 = 0,6227; \\ r &= -0,95113; \tilde{w}_2 = 0,613; \tilde{w}_3 = 0,6585; \tilde{w}_4 = 0,8212; \tilde{w}_5 = 0,6802; \tilde{w}_6 = 0,4958, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{w} = \frac{w}{h^4}; \tilde{m} = \frac{m}{h^2}. \quad (9)$$

Безразмерные изгибающие моменты вычисляются по (5) с учётом (6) и (7) при $\mu = 0.3$:

$$w_1^{\xi\xi} = (1/6)^2(0,613 + 0,613) = 0,034; \quad (10)$$

$$m^{(\xi)} = -(0,034 + 0.3 \cdot 0,034) = -0,0442. \quad (11)$$

Выполним расчет, следуя методике [1]. Под равномерной нагрузкой интенсивностью q пластинка вызовет в колонне реакцию R . Устранив из системы колонну получим шарнирно опёртую

квадратную плиту, несущую лишь заданную нагрузку q , прогибы производимые этой нагрузкой - w_0 . Далее устранив нагрузку q и проложив в центре сосредоточенную силу получим прогибы w_1 . Из условия что пластинка в центральной точке не прогибается получим значение реакции $R = w_0/w_1$. Значения моментов в расчётных точках получены методом суперпозиции.

В таблице приведены значения изгибающих моментов на опоре и в четверти пролёта, а также

значение реакции в колонне при разном числе разбиения. Одновременно расчет выполнялся

МКЭ с использованием программного комплекса ЛИРА-САПР 2013 R3.

Таблица 1

Результаты расчёта задачи 1

	R	$m_1^{(\xi)}$	Изгибающий момент в четверти пролёта	
1/4	-0.2946	-0.0261		
1/6	-0.3170	-0.0443	$m^{(\xi)}$	$m^{(\eta)}$
1/8	-0.3283	-0.0570	0.001	0.0192
МКЭ	-	-0.0482	0.0009	0.019
по [1]	-0.3584	-0.0588	0.0004	0.0174

Расчет проводился на сетке с разным шагом. Из таблицы видно, что полученные значения R на опоре увеличиваются с уменьшением шага. Особенность в центральной точке связана с характером сосредоточенного воздействия на плиту.

2. Рассмотрим теперь квадратную шарнирно опертую плиту на четырёх опорах, на действие

$$\tilde{m}_1 = 0.372; \tilde{m}_2 = 0.122; \tilde{m}_3 = 0.4264; \tilde{m}_4 = -0.6552; \tilde{m}_5 = 0.2918; \tilde{m}_6 = 0.3959;$$

$$\tilde{w}_1 = 0.2424; \tilde{w}_2 = 0.1493; \tilde{w}_3 = 0.233; r = -0.3707; \tilde{w}_5 = 0.1782; \tilde{w}_6 = 0.188$$

Безразмерные изгибающие моменты вычисляются по (5) с учётом (6) и (7) при $\mu = 0.2$:

$$w_4^{\xi\xi} = (1/6)^2(0.1782 + 0.1493) = 0.0091; (12)$$

равномерно распределённой нагрузки $q=1$. Расчетная схема представлена на рис. 4. Система разрешающих уравнений аналогична первой задаче, за исключением того, что скачки учитываются в точке 4, а не в точке 1. Откуда получаем решение:

$$m_4^{(\xi)} = -(0.0091 + 0.2 \cdot 0.0091) = -0.0109. (13)$$

В таблице приведены значения изгибающих моментов при разном числе разбиения.

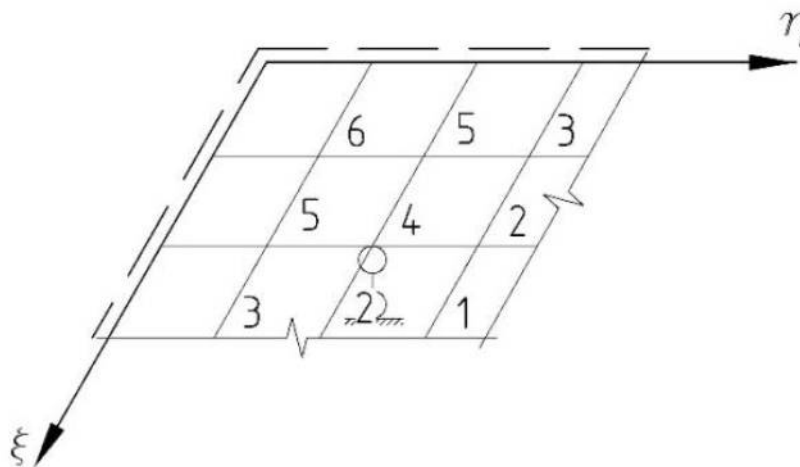


Рис. 4. Четверть расчетной схемы к задаче 2

Таблица 2

Результаты расчёта задачи 2

	h=1/6			h=1/9
№ точки	4	5	6	момент на опоре
$m^{(\xi)}$	-0.0109	0.00018	0.0066	-0.0168
МКЭ	-0.0119	0.00018	0.0054	-0.0119
$m^{(\eta)}$	-0.0109	0.0095	0.0066	-
МКЭ	-0.0119	0.0079	0.0054	-

Анализ результатов, приведенных в таблице 2, показывает, что при достаточно редком разби-

ении значения изгибающих моментов в расчетных точках близки к значениям полученным ме-

тодом конечных элементов. Относительная погрешность момента в точке 4 (на опоре) при $h=1/6$ составляет 9 %. Это позволяет судить о сходимости результата на минимальной сетке. Предложенный алгоритм решения можно использовать как дополнительный вариант расчета, наряду с другими методами.

Выводы. Решение тестовых задач на ряде сеток и использование принципа суперпозиции позволило подтвердить достоверность полученных результатов и решить новые задачи о расчете безбалочного перекрытия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки пер. с англ. М., Наука, 1966. 635 с.
2. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. М.: Изд-во АСВ, 2008. 280 с.
3. Киселев В.А. Расчет пластин. М: Стройиздат, 1973. 151 с.
4. Руководство по проектированию железобетонных конструкций с безбалочными перекрытиями / НИИ бетона и железобетона Госстроя СССР, Центр. н.-и. и проект.-эксперим. ин-т пром. зданий и соор. Госстроя СССР, Урал. проект. и н.-и. ин-т Госстроя СССР. М.: Стройиздат, 1979. 63 с.
5. Вайнберг Д.В. Справочник по прочно-сти, устойчивости и колебаниям пластин. К.: Будивельник, 1973. 488 с.
6. Михайлов Б.А. Пластинки и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 196 с.
7. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н. Мозгалева М.Л. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2009. 336 с.
8. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Изд-во: М.: Инфра-М; издание 2-е, испр. и доп, 2011. 638 с.
9. Li C., Zeng F. Finite difference methods for fractional differential equations // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2012. Т. 22. № 4. С.1230014.
10. Самохвалова Е.О., Иванов А.Д. Стык колонны с безбалочным бескапитальным перекрытием в монолитном здании // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 3. С. 33–37.
11. Шарипов Л.Ш., Муминов И.С. Безбалочное перекрытие для строительства многоэтажных зданий из монолитного железобетона // Вестник Таджикского технического университета. 2014. Т. 4. № 28. С. 107–110.
12. Роголевич В.В., Тимашев С.А. Новый приближенный метод расчета гибких пластин постоянной и переменной жесткости // Академический вестник УралНИИ-Проект РААСН. 2012. № 1. С. 52–56.
13. Абрашитов В.С., Жуков А.Н., Карев М.Н., Кислицин Н.М., Лодяной К.А. Расчет квадратной пластины на изгиб. Формирование локальной матрицы жесткости // В сборнике: Эффективные строительные конструкции: теория и практика сборник статей XVI Международной научно-технической конференции. Под редакцией Н.Н. Ласькова, 2016. С. 24–35.
14. Жилкин В.А. Расчет шарнирно опертых прямоугольных пластин методом конечных разностей в MathCAD // АПК России. 2017. Т. 24. №1. С. 119–129.
15. Байшев А.Ю., Байшев Ю.П., Голубева Е.А., Годзевич Э.В., Плохих В.И. Инновационные подходы к архитектурно-строительному проектированию железобетонных перекрытий многоэтажных зданий // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. 2017. №1 (32). С. 69–73.

Информация об авторах

Уварова Наталья Борисовна, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики.

E-mail: nbuvarova@yandex.ru

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет.
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Парамонов Евгений Евгеньевич, студент.

E-mail: evg.paramonov@yandex.ru

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет.
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Поступила в октябре 2017 г.

© Уварова Н.Б., Парамонов Е.Е., 2018

N.B. Uvarova, E.E. Paramonov**APPLICATION OF THE GENERALIZED EQUATIONS OF FINITE DIFFERENCE METHOD TO THE CALCULATION OF BENT PLATES OF LOCAL AND DISCONTINUOUS LOADINGS**

The article is devoted to the calculation of a bent plate of local discontinuous loadings. We use generalized equations of finite difference method (FDM). These equations allow to solve a problem taking into account the discontinuities of a required function, its first-order derivative and the right-hand side of a primitive differential equation within integration domain. The Germain–Lagrange dynamic plate differential equation comes to two numerical similarities. Obtained equations are set down for every computational point. The proposed method is shown in the example of the calculation of an unrestrained plate with pin-bearing support in the center and an unrestrained plate with pin-bearing support in four points under uniformly distributed load. The calculation data with the minimum number of partitions is compared to the known solution of S.P. Timoshenko and Finite Element Method (FEM). These results illustrate the convergence of solution, so numerical method can be applied.

Keywords: bent plate, refined, isotropic, discontinuous loadings, local, computational solution, generalized equations of finite difference method.

Information about the authors

Natalia B. Uvarova, PhD, Assistant professor.

E-mail: nbuvarova@yandex.ru

Moscow state university of civil engineering (national research university).

Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26.

Evgeniy E. Paramonov, Bachelor student.

E-mail: evg.paramonov@yandex.ru

Moscow state university of civil engineering (national research university).

Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26.

Received in October 2017