Вендин С.В., д-р техн. наук, проф.
Белгородский государственный аграрный университет имени В.Я. Горина
Щербинин И.А., канд. техн. наук, доц.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

31rusacpirant@mail.ru

Рассмотрены вопросы нестационарной теплопроводности в многослойных объектах. Предложено решение краевой однородной задачи с нестационарными граничными условиями третьего рода. В основу решения положены: метод разделения переменных Фурье по собственным функциям задачи и интеграл Дюамеля. Предложенная форма решения имеет явный вид и благодаря рекуррентной форме записи основных соотношений может быть полезной при численных расчетах и анализе кинетики нестационарного нагрева (охлаждения) многослойных объектов.

Ключевые слова: *краевая задача, уравнение теплопроводности Фурье, многослойный объект, нестационарные граничные условия третьего рода, явная рекуррентная форма решения.*

Многие важные практические задачи расчета температурных полей в многослойных объектах могут рассматриваться как одномерные. Ранее автором было предложено аналитическое решение однородной задачи нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при стационарных граничных условиях третьего рода [1].

Ниже приведено решение такой задачи при нестационарных граничных условиях третьего рода.

В общем случае математическая постановка одномерной задачи теплопроводности для многослойных объектов определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t} = a_i \nabla^2 T_i(r,t)\,, \quad x_{i-1} \le r \le x_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

где a_i,– соответственно коэффициенты температуропроводности i-го слоя; $T_i(r,t)$ – температурное поле i -го слоя; x_0, x_n – соответственно координаты нижней и верхней геометрической (свободной) поверхности объекта;

Будем полагать также, что объект является изотропным, т.е. теплофизические параметры в каждом слое постоянны и однородны по всему занимаемому ими объему.

Граничные условия на свободных поверхностях $r = x_o$,$r = x_n$ определим как граничные условия третьего рода, полагая, что граничные условия первого и второго рода могут быть представлены как частные случаи граничных условий третьего рода.

В таком случае согласно [2] запишем:

$$\left[T_1(r,t) + h_1 \frac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_0} = \varphi_1(t)\,, \quad \left[T_n(r,t) + h_2 \frac{\partial T_n(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_n} = \varphi_2(t) \tag{2}$$

Граничные условия сопряжения температурных полей и тепловых потоков на границах раздела слоев в общем виде определяются следующими выражениями:

$$\left|T_i(r,t) = T_{i+1}(r,t)\right|_{r-x_i}, \quad \left|\lambda_i \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=x_i} \tag{3}$$

$$i = 1, 2, \ldots n-1,$$

где $\boldsymbol{\lambda_i}$ – теплопроводность i- го слоя.

Начальное распределение температурных полей в каждом слое имеет вид:

$$T_i(r,0) = f_i(r)\,, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

Если представить искомое решение задачи в виде суммы

$$T_i(r,t) = f_i(r) + v_i(r,t) \tag{5}$$

то задача сводится к определению функций $v_i(r,t)$, которые являются решением задачи с нулевыми начальными условиями и удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial v_i(r,t)}{\partial t} = a_i \nabla^2 v_i(r,t)\,,\quad x_{i-1} \le r \le x_i\,,\quad i = 1, 2,\ldots n \tag{6}$$

$$\left[v_1(r,t) + h_1 \frac{\partial v_1(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_0} = \varphi_1(t)\,,\quad \left[v_n(r,t) + h_2 \frac{\partial v_n(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_n} = \varphi_2(t) \tag{7}$$

$$\left|v_i(r,t) = v_{i+1}(r,t)\right|_{r=x_i}\,,\quad \left|\lambda_i \frac{\partial v_i(r,t)}{\partial r} = \lambda_{i+1} \frac{\partial v_{i+1}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=x_i} \tag{8}$$

i = 1, 2,…n-1,

$$v_i(r,0) = 0\,,\quad i = 1, 2,\ldots n \tag{9}$$

В общем случае решение задачи с неоднородными граничными условиями, зависящими от времени, может быть определено интегралом Дюамеля [2, 3]:

$$v_i(r,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i(r,\tau,t-\tau)\,d\tau\,,\quad \text{при } t>0 \tag{10}$$

где $\dot{v}_i(r,\tau,t)$ – решение задачи при условии, что τ является параметром.

Тогда функции $\dot{v}_i(r,\tau,t)$ должны удовлетворять дифференциальному уравнению (5) с начальными условиями $\dot{v}_i(r,\tau,0)$=0 и граничным условиям на свободных поверхностях $r=x_0$, x_n, а также условиям сопряжения:

$$\left[\dot{v}_1(r,\tau,t) + h_1 \frac{\partial \dot{v}_1(r,\tau,t)}{\partial r}\right]_{r=x_0} = \varphi_1(t)\,,\quad \left[\dot{v}_n(r,\tau,t) + h_2 \frac{\partial \dot{v}_n(r,\tau,t)}{\partial r}\right]_{r=x_n} = \varphi_2(t) \tag{11}$$

$$\left|\dot{v}_i(r,\tau,t) = \dot{v}_{i+1}(r,\tau,t)\right|_{r=x_i}\,,\quad \left|\lambda_i \frac{\partial \dot{v}_i(r,\tau,t)}{\partial r} = \lambda_{i+1} \frac{\partial \dot{v}_{i+1}(r,\tau,t)}{\partial r}\right|_{r=x_i} \tag{12}$$

i = 1, 2,…n-1

В соответствии с найденным решением функции $\dot{v}_i(r,\tau,t)$ определяются следующими выражениями:

$$\dot{v}_i(r,\tau,t) = \psi_i(r,t) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\tau) \dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m} r) \exp(-\mu^2{}_{i,m} a_i t) \tag{13}$$

а функции $v_i(r,t)$ имеют вид:

$$v_i(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\mu_{i,m}^2 a_i \int_0^t C_m(\tau) \exp(\mu_{i,m}^2 a_i \tau)\,d\tau\right] \dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m} r) \exp(-\mu_{i,m}^2 a_i t) \tag{14}$$

где $\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m} r)$ – собственные функции задачи

$$\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m} r) = \left[\prod_{k=1}^{i} Z_k\right] \times \left[Y_1(\mu_{i,m} r) + B_{i,m} Y_2(\mu_{i,m} r)\right]\,,\quad i = 1,2,\ldots n \tag{15}$$

$$B_{1,m} = -\frac{Y_1(\mu_{1,m} x_0) + h_1 Y_1'(\mu_{1,m} x_0)}{Y_2(\mu_{1,m} x_0) + h_1 Y_2'(\mu_{1,m} x_0)} \tag{16}$$

$$B_{i,m} = \frac{\lambda_i \dfrac{Y_1'(\mu_{i,m} x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i,m} x_{i-1})} - \lambda_{i-1} \dfrac{Y_1'(\mu_{i-1,m} x_{i-1}) + B_{i-1} Y_2'(\mu_{i-1,m} x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i-1,m} x_{i-1}) + B_{i-1} Y_2(\mu_{i-1,m} x_{i-1})}}{\lambda_i \dfrac{Y_2'(\mu_{i,m} x_{i-1})}{Y_2(\mu_{i,m} x_{i-1})} - \lambda_{i-1} \dfrac{Y_1'(\mu_{i-1}, m x_{i-1}) + B_{i-1} Y_2'(\mu_{i-1,m} x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i-1,m} x_{i-1}) + B_{i-1} Y_2(\mu_{i-1,m} x_{i-1})}} \times \frac{Y_1(\mu_{i,m} x_{i-1})}{Y_2(\mu_{i,m} x_{i-1})} \tag{17}$$

i = 2,3,…n.

$$Z_1 = 1;\ Z_i = \frac{Y_1(\mu_{i-1,m}x_{i-1}) + B_{i-1}Y_2(\mu_{i-1,m}x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i,m}x_{i-1}) + B_iY_2(\mu_{i,m}x_{i-1})}, \mathrm{i} = 2,3,\ldots \mathrm{n} \tag{18}$$

$\mu_{i,m} = \mu_{n,m}\sqrt{a_n / a_i}$, $\mu_{n,m}$ – собственные числа задачи, определяемые согласно уравнения

$$Y_1(\mu_{n,m}x_n) + h_2Y_1'(\mu_{n,m}x_n) + B_{n,m}Y_2(\mu_{n,m}x_n) + h_2Y_2'(\mu_{n,m}x_n) = 0,\ \mathrm{m} = 0,1,2.. \tag{19}$$

$$C_m(\tau) = -\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_i(r,\tau)G(r)\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}r)dr\right] / \sum_{i=1}^{n}\dot{J}_i^2 \tag{20}$$

$$\psi_i(r,\tau) = \varphi_1(\tau) + \left[\dot{\alpha}_i(\tau)\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)\right]\times\left[\xi(r) + \dot{\beta}_i(\tau)\right] \tag{21}$$

$$\dot{\beta}_1(\tau) = -\left[\xi(x_0) + h_1\xi'(x_0)\right] = 0,\ \dot{\beta}_i(\tau) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\left[\xi(x_{i-1}) + \dot{\beta}_{i-1}\right] - \xi(x_{i-1}),\ \mathrm{i} = 2,3,\ldots \mathrm{n} \tag{22}$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\lambda_n}{\lambda_{i+1}} \times \frac{1}{\xi(x_n) + \dot{\beta}_n(\tau) + h_2\xi'(x_n)},\quad \mathrm{i} = 1, 2,\ldots \mathrm{n}. \tag{23}$$

$$\dot{J}_i^2 = \frac{\lambda_i}{a_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(r)\dot{F}_{i,m}^2(\mu_{i,m}r)dr$$

Весовая функция $G(r)$, а также конкретный вид функций $\xi(r)$ и $\dot{F}_i(\mu_i r)$ определяются выражениями:

а). Декартова (прямоугольная) система координат:

$$G(r) = 1, \xi(r) = r, Y_1(\mu_i r) = \sin(\mu_i r), Y_2(\mu_i r) = \cos(\mu_i r) \tag{24}$$

б). Сферическая система координат:

$$G(r) = r^2, \xi(r) = \frac{1}{r}, Y_1(\mu_i r) = \frac{1}{r}\sin(\mu_i r), Y_2(\mu_i r) = \frac{1}{r}\cos(\mu_i r) \tag{25}$$

в). Цилиндрическая система координат:

$$G(r) = r, \xi(r) = \ln r, Y_1(\mu_i r) = J_0(\mu_i r), Y_2(\mu_i r) = N_0(\mu_i r) \tag{26}$$

Важное замечание:

Иногда при решении задач для сплошного шара или цилиндра полученное решение требует ограниченности в центре шара или на оси цилиндра. Тогда нижние и верхние граничные условия записываются в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_0} = 0,\quad \left[T_n(r,t) + h_2\frac{\partial T_n(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_n} = \varphi_2(t) \tag{27}$$

В таком случае в полученном решении для многослойных объектов следует полагать

$$B_{1,m} = 0,\ \psi_i(r,\tau) = \varphi_2(\tau),\ \mathrm{i}=1,2...\mathrm{n} \tag{28}$$

и далее все расчеты проводятся в соответствии с основным решением.

Таким образом, нами получено общее решение краевой однородной задачи с нестационарными граничными условиями третьего рода. Предложенная форма решения имеет явный вид и благодаря рекуррентной форме записи основных соотношений может быть полезной при численных расчетах и анализе кинетики нестационарного нагрева (охлаждения) многослойных объектов.

Различные частные решения подобных задач могут быть сразу же записаны с учетом граничных условий (2), а также выражений (4), (5), (14) и (24) – (28).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вендин С.В. К расчету нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода // ИФЖ. 1993. Т.65. №1. С. 98–100.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб.

Пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.:

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 835 с.

4. Вендин С.В., Щербинин И.А. к расчету распространения электромагнитного импульса при СВЧ обработке диэлектрических сред // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 2. С. 204–206.

Vendin S.V., Shcherbinin I.A

TO SOLVING THE PROBLEM OF UNSTEADY HEAT CONDUCTION IN LAYERED MEDIA

The problems of non-stationary heat conduction in multilayer objects. The solution of the boundary of the homogeneous problem with unsteady boundary conditions of the third kind. The basis of the solutions put: the Fourier method of separation of variables in eigenfunctions of the integral of Duhamel. The proposed solution has the form of an explicit form and thanks to the recurrent form of recording basic relations can be useful in numerical calculations and analysis of the kinetics of transient heating (cooling) multilayer objects.

Key words: *boundary value problem, the Fourier heat equation, multi-object unsteady boundary conditions of the third kind, explicit form of recursive solutions.*

Вендин Сергей Владимирович, доктор технических наук, профессор.
Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина.
Адрес: 308503, пос. Майский Белгородского района Белгородской области, ул. Вавилова, д.1.

Щербинин Игорь Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры ЭЭиА.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46
E-mail: 31rusacpirant@mail.ru