

*Радайкин О.В., канд. техн. наук, доц.
Казанский государственный архитектурно-строительный университет*

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МОМЕНТА ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЁТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ БЕТОНА РАСТЯНУТОЙ ЗОНЫ

olegxxii@mail.ru

При нормативном расчёте момента трещинообразования изгибаемых железобетонных элементов используется коэффициент пластичности γ , который по СП 63.13330.2012 на 35 % меньше, чем по «старому» СНиП 2.03.01-84. Возникает вопрос, чем вызвана такая заметная разница и какая из методик даёт более достоверные результаты? Данная статья направлена на поиск ответа на поставленный вопрос. Для этого подробно рассмотрен физический смысл коэффициента γ с привлечением нелинейной деформационной модели нормального сечения. Получена расчётная формула для γ в зависимости от степени армирования элемента, справедливая для бетонов обычных классов В15-В35. Проведено сравнение расчётного момента трещинообразования по предложенной методике с экспериментами других авторов. Установлено хорошее совпадение результатов.*

Ключевые слова: железобетон, момент трещинообразования, коэффициент пластичности, пластический момент сопротивления.

Введение. Для момента трещинообразования изгибаемых железобетонных элементов в отечественной научно-технической и нормативной литературе известна формула:

$$M_{crc} = R_{bm} W_{pl}, \quad (1)$$

где R_{bm} – нормативная прочность бетона при растяжении; W_{pl} – упругопластический момент сопротивления сечения, равный

$$W_{pl} = \gamma W_{red}, \quad (2)$$

где W_{red} – упругий момент сопротивления приведённого сечения; γ – коэффициент пластичности.

Впервые она была предложена в работе [1] и после вошла в российские Нормы по проектированию железобетонных конструкций. Однако значение коэффициента γ для прямоугольных сечений в СНиП 2.03.01-84* было принято равным 1,75, а в актуализированном СП 63.13330.2012 – равно 1,3. Разница в значениях составляет почти 35 %. В связи с этим возникает вопрос: по какой методике считать? какая из них даёт более близкие к эксперименту результаты?

При этом стоит заметить, что в европейских нормах, как описано в [2], такого понятия как «расчёт на образование трещин» нет, а для фигурирующего в расчётах деформаций момента появления трещин не приведено никакого математического выражения. В руководстве к Еврокоду 2 [3] этот момент предлагается определять приближенно, как для упругого тела, причём рассматривая только бетонное сечение и исключая арматуру (в таком случае коэффициент $\gamma=1,0$). Такой же подход

принят и в американской научно-технической и нормативной литературе [4].

Методология. К ответу на поставленный выше вопрос подойдём двояко:

1 – теоретически: произведём аналитический разбор формул (1) и (2) с использованием общих принципов сопротивления материалов и механики железобетона;

2 – практически: выполним сравнение результатов расчёта по двум методикам с известными в научной литературе опытными данными для M_{crc} .

Основная часть. Расчёт упругого момента сопротивления приведённого сечения – W_{red} – одинаков в обеих методиках и основывается на известных выражениях сопротивления однонаправленных композитов. При выводе формулы упругопластического момента сопротивления сечения – W_{pl} – могут быть нюансы, поскольку напрямую этот параметр в методиках не вычисляется. Поэтому для получения расчётного выражения W_{pl} за основу примем допущения методики СНиП 2.03.01-84* и рассмотрим рис. 1, на котором показаны схема усилий, напряжений и деформаций для бетонного и железобетонного сечений, находящихся в стадии Ia НДС. Вначале выполним анализ для неармированного сечения. Для этого запишем два уравнения равновесия (принимая $M = M_{crc}$), одно совместности деформаций и два физических соотношения соответственно:

$$M_{crc} - N_{bt} \frac{h}{4} - N_b \frac{h}{3} = 0 \quad (3)$$

$$N_{bt} - N_b = 0 \quad (4)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{bt2} \quad (5)$$

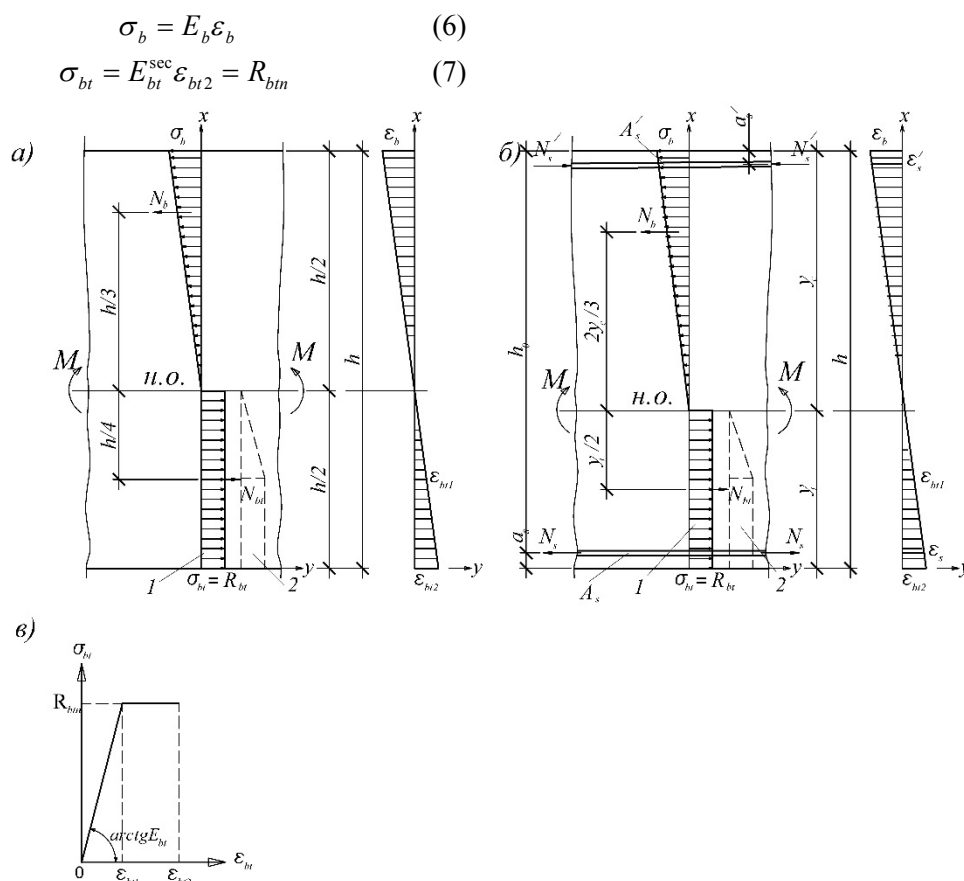


Рис. 1. Схемы усилий, напряжений и деформаций бетонного сечения (а) и железобетонного (б); диаграмма деформирования бетона в растянутой зоне (в): 1 – эпюра нормальных напряжений в растянутой зоне бетона по СНиП 2.03.01-84*; 2 – то же по СП 63.13330.2012

При этом выражение (5) получается из подобия соответствующих геометрических фигур – треугольников – на эпюре деформаций. Необходимо также записать дополнительные физические соотношения для растянутого бетона в конце стадии I:

$$\sigma_{bt} = E_{bt} \varepsilon_{bt1} = R_{btm} \quad (8)$$

Переходя от усилий к напряжениям в формуле (3), получим:

$$M_{crc} = R_{btm} b \frac{h}{2} \frac{h}{4} + \sigma_b \frac{1}{2} b \frac{h}{2} \frac{h}{3} \quad (9)$$

Для дальнейших рассуждений примем следующее выражение, характеризующее диаграмму деформирования рис. 1, в:

$$\varepsilon_{bt2} = k \varepsilon_{bt1}, \quad (10)$$

где k – некий коэффициент, который, как показывает анализ расчётных предпосылок СНиП 2.03.01-84*, может быть принят равным 2. Его введение позволяет в дальнейших расчётах использовать только нормируемый модуль E_{bt} и исключить секущий E_{bt}^{sec} .

Из условия (5) вытекает $\varepsilon_b = k \varepsilon_{bt1}$, а из (8):

$$\varepsilon_{bt1} = \frac{R_{btm}}{E_{bt}}. \text{ В рассматриваемой методике присутствует ещё одно допущение: } E_{bt} = E_b. \text{ Поставляя полученные выражения в (6), будем иметь:}$$

Поставляя (11) в (9), придём к следующему выражению:

$$\sigma_b = k R_{btm} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), придём к следующему выражению: $M_{crc} = R_{btm} b \frac{h}{2} \frac{h}{4} + k R_{btm} \frac{1}{2} b \frac{h}{2} \frac{h}{3}$. Сокращая и приводя подобные, получим:

$$M_{crc} = R_{btm} \frac{bh^2}{6} \left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2} \right) = R_{btm} W \left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2} \right) \quad (12)$$

где $W = \frac{bh^2}{6}$ – упругий момент сопротивления бетонного сечения, а выражение в скобках – есть коэффициент пластических деформаций:

$$\gamma = \left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2} \right) \quad (13)$$

В случае $k=2$: $\gamma = 1,75$ и $W_{pl} = \frac{bh^2}{3,5}$, что соответствует ранее полученной Гвоздевым А.А. формуле.

Стоит отметить, что значение $\gamma = 1$ в формуле (13) (т.е. если не учитывать пластические деформации) достигается при $k=0,5$, что некорректно с точки зрения физического смысла этого коэффициента, поскольку в этом случае предельные деформации ϵ_{bt2} должны совпадать с упругими ϵ_{bt1} , т.е. должно быть $k=1$. Однако, к такому результату привели изначальные предпосылки методики, упрощающие расчёт.

Сравнительный анализ методик двух Нормативов показывает, что их расчётные предпосылки несколько отличаются. Так, в отличие от «старого» СНИПа в актуализированном СП:

$$M_{crc} = R_{bt} b \left[\frac{1}{2} \frac{h}{2} \frac{\epsilon_{bt1}}{\epsilon_{bt2}} \frac{2}{3} \frac{h}{2} \frac{\epsilon_{bt1}}{\epsilon_{bt2}} + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{bt1}}{\epsilon_{bt2}} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{bt1}}{\epsilon_{bt2}} \right) + \frac{h}{2} \frac{\epsilon_{bt1}}{\epsilon_{bt2}} \right) \right] + \sigma_b \frac{1}{2} b \frac{h}{2} \frac{h}{3}$$

Упрощая и подставляя $k = \frac{\epsilon_{bt2}}{\epsilon_{bt1}}$, получим:

$$M_{crc} = R_{bt} b \frac{h^2}{8} \left(1 - \frac{1}{3k^2} \right) + \sigma_b b \frac{h^2}{12} \quad (14)$$

По аналогии с предыдущим использовать далее формулу (11), подставляя её в (14), не позволяет предпосылка $E_{bt} \neq E_b$. Поэтому формула (11) должна быть изменена следующим образом:

$$\sigma_b = \frac{E_b}{E_{bt,red}} k R_{bt} = \frac{k}{k_E} R_{bt}, \quad (15)$$

$$M_{crc} = R_{bt} \frac{bh^2}{6} \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3k^2} \right) + \frac{k}{2k_E} \right] = R_{bt} W \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3k^2} \right) + \frac{k}{2k_E} \right] \quad (16)$$

В этом случае коэффициент пластических деформаций равен:

$$\gamma = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3k^2} \right) + \frac{k}{2k_E} \quad (17)$$

Таким образом, при $k=1,875$ и $k_E = 0,51...0,87$ получим $\gamma = 1,756...2,517$, что не соответствует принятому в актуализированном СП $\gamma = 1,3 - const$. Видимо, значение этого коэффициента взято по каким-то иным соображениям, т.е. вопреки теоретическим предпосылкам, заложенным в методику. Отметим, что если принять $E_{bt} = E_b$, то по формуле (17) $\gamma = 1,62 - const$. А если при этом взять $k=2$, то $\gamma = 1,69 - const$, что

$$M_{crc} = R_{bt} \left\{ b \left(\frac{1}{3} k \frac{y_c^3}{y_i} + \frac{1}{2} y_i^2 \right) + \frac{k}{y_i} \frac{E_s}{E_b} \left[A_s (y_i - a_s)^2 + A'_s (y_c - a'_s)^2 \right] \right\} \quad (18)$$

1 – эпюра напряжений в растянутой зоне не прямоугольная, а трапециевидная;
2 – коэффициент

$$k = \frac{\epsilon_{bt2}}{\epsilon_{bt1}} = \frac{0,00015}{0,00008} = 1,875 < 2 \quad (\text{в СП}$$

63.13330.2012 для двухлинейной диаграммы используется обозначение $\epsilon_{bt1,red}$ вместо ϵ_{bt1});

3 – модуль деформации бетона при растяжении не равен модулю при сжатии – $E_{bt} \neq E_b$

($E_{bt} = E_{bt,red} = \frac{R_{bt}}{\epsilon_{bt1,red}} \approx (0,51...0,87)E_b$ в зависимости от класса бетона).

Уточнение первой предпосылки повлияет на выражение (9), которое примет вид:

где k_E – коэффициент, зависящий от класса бетона (для бетонов обычных классов $k_E = 0,51...0,87$; например, для В3,5, В20 и В60 соответственно

$$k_{E3,5} = \frac{R_{bt}}{\epsilon_{bt1,red} E_b} = \frac{0,39}{0,00008 \cdot 9500} = 0,51,$$

$$k_{E20} = \frac{1,35}{0,00008 \cdot 27500} = 0,61,$$

$$k_{E60} = \frac{2,75}{0,00008 \cdot 39500} = 0,87).$$

Подставляя (15) в (14), будем иметь:

хорошо согласуется с результатами формулы (13) – разница всего 3,7%.

Также стоит отметить, что значение $\gamma=1,0$ в формуле (17) (т.е. если не учитывать пластические деформации) достигается при $k=0,732...0,934$, что, как и в предыдущем случае для формулы (13) некорректно с точки зрения физического смысла этого коэффициента. Однако, если принять $E_{bt} = E_b$, т.е. $k_E = 1$, то получим $k=1$. Тогда методика становится логически непротиворечивой.

Рассуждая совершенно аналогично для армированного элемента (рис. 1, б) придём к следующей формуле для приведённого момента трещинообразования:

где выражение во внешних скобках – есть упруго-пластический момент сопротивления

$$W_{red} = \frac{1}{y_t} \left\{ \left[\frac{bh^3}{12} + bh \left(y_t - \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{E_s}{E_b} \left[A_s (y_t - a_s)^2 + A'_s (y_c - a'_s)^2 \right] \right\} \quad (19)$$

позволяет вычислить коэффициент пластических деформаций:

$$\gamma = \frac{W_{pl}}{W_{red}} \quad (20)$$

Если подставить выражения для W_{pl} и W_{red} в (20), то получится довольно громоздкая формула,

приведённого сечения – W_{pl} . Известное выражение для упругого момента сопротивления приведённого сечения:

которую приводить не будем, но результаты расчёта по ней представим в табличной форме ниже (табл. 1, значения вне скобок). При этом рассмотрены изгибаемые железобетонные элементы только с одиночным армированием в растянутой зоне – стержнями из арматуры, имеющей модуль деформаций равный 200000 МПа.

Таблица 1

Результаты расчёта коэффициента γ

Коэффициент армирования $\mu \times 100 \%$	Класс бетона В, МПа									
	B15	B20	B25	B30	B35	B40	B45	B50	B55	B60
0,1	1,760 (1,617)	1,759 (1,607)	1,758 (1,599)	1,757 (1,590)	1,757 (1,581)	1,757 (1,575)	1,756 (1,569)	1,756 (1,561)	1,756 (1,555)	1,756 (1,549)
0,5	1,793 (1,738)	1,788 (1,710)	1,785 (1,691)	1,783 (1,672)	1,781 (1,657)	1,780 (1,646)	1,779 (1,636)	1,778 (1,624)	1,778 (1,615)	1,777 (1,606)
1	1,825 (1,857)	1,818 (1,814)	1,813 (1,786)	1,809 (1,759)	1,806 (1,736)	1,804 (1,721)	1,803 (1,708)	1,802 (1,691)	1,801 (1,679)	1,800 (1,668)
3	1,900 (2,133)	1,890 (2,072)	1,884 (2,029)	1,878 (1,987)	1,874 (1,951)	1,871 (1,927)	1,869 (1,905)	1,867 (1,879)	1,865 (1,859)	1,864 (1,842)
5	1,936 (2,258)	1,927 (2,201)	1,921 (2,157)	1,915 (2,112)	1,911 (2,073)	1,908 (2,045)	1,906 (2,020)	1,904 (1,990)	1,902 (1,967)	1,901 (1,947)
10	1,971 (2,353)	1,965 (2,324)	1,962 (2,291)	1,958 (2,253)	1,955 (2,215)	1,952 (2,189)	1,951 (2,163)	1,949 (2,130)	1,948 (2,105)	1,947 (2,082)

Кроме того, в табл. 1 в скобках приведены значения γ , вычисленные по диаграммной методике [5, 6].

По полученным данным можно сделать следующие выводы:

– для рассмотренных железобетонных элементов коэффициент пластических деформаций получился больше, чем для бетонных – до 12,6 % ($\gamma > 1,75$);

– такой не учёт влияния арматуры на пластические деформации растянутого бетона в Нормах занижает значение момента трещинообразования и, как следствие, в некоторых случаях должен приводить к заметному перерасходу материалов;

– с увеличением класса бетона по прочности коэффициент γ уменьшается, но незначительно, оставаясь практически постоянным, поэтому за расчётное значение этого коэффициента можно принять величину, соответствующую максимальному нормируемому классу бетона (для рассмотренных элементов – В60);

– с увеличением процента армирования от 0,1 % до 10 % коэффициент γ увеличивается до 12,0 %;

– диаграммная методика [5, 6] отличается по γ от предложенных формул (19,20) на +19,4...-12,3 %, что зависит от класса бетона и коэффициента армирования;

– несмотря на заметное различие в значениях γ в обоих подходах неизменно сохраняется общая для них тенденция: с увеличением класса бетона γ несколько понижается, а с увеличением процента армирования – γ растёт, причём существенно.

На основе полученных теоретических результатов и с учётом выполненного сравнения с экспериментами для уточнения значения коэффициента γ предлагается следующая зависимость:

$$\gamma = \begin{cases} 1,6 + \frac{1}{100\sqrt{\mu_s}}, & \text{если } \mu_s \geq 0,003 \\ 1,6, & \text{если } \mu_s < 0,003 \end{cases} \quad (21)$$

При этом $\gamma = 1,75$ только при $\mu_s = 0,00444$.

Перейдём к практической части работы: сравнению полученных теоретических результатов с экспериментальными данными. Сравнение представлено в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение теоретических и экспериментальных данных M_{crc} , кН·м

Источник	Шифр балки и сечение	Бетон	Арматура	Схема армирования	M_{crc}^{ex} , кН·м	M_{crc}^{th} , кН·м		
						$\gamma = 1,3$	$\gamma = 1,75$	γ по ф. (21)
Пирадов К.А. [7]	1БН-9в 100×75мм	B25, $R_{bt,ser}=2,12$ МПа, $E_b=26500$ МПа	А-III (А400), $E_s=200000$ МПа	1Ø8, $a_s=25$ мм, $\mu_s = 0,0067$	0,27 ($\gamma^{ex}=0,959$)	0,366	0,492	0,484 ($\gamma=1,722$)
	2Ø8, $a_s=25$ мм, $\mu_s = 0,0134$			0,27 ($\gamma^{ex} = 0,909$)	0,386	0,520	0,501 ($\gamma=1,686$)	
	2Ø10, $a_s=25$ мм, $\mu_s = 0,0209$			0,54 ($\gamma^{ex} = 1,721$)	0,408	0,549	0,523 ($\gamma=1,669$)	
Вагагин С.С. [8]	БО-1-3а 200×102мм	B45, $R_{bt,ser}=2,50$ МПа, $E_b=34200$ МПа	А-III (А400), $E_s=208000$ МПа	2Ø25, $a_s=38$ мм, $\mu_s = 0,0481$	2,162 ($\gamma^{ex} = 0,867$)	3,242	4,364	4,103 ($\gamma=1,652$)
	2Ø25, $a_s=34$ мм, $\mu_s = 0,0491$			3,192 ($\gamma^{ex} = 1,237$)	3,355	4,517	4,103 ($\gamma=1,645$)	
	БС-1-5а 202×103мм		А-III (А400), $E_s=201000$ МПа	2Ø12+2Ø12, $a_s=18$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0109$	3,026 ($\gamma^{ex} = 1,402$)	2,805	3,776	3,659 ($\gamma=1,696$)
	БС-1-5б 201×125мм			2Ø12+2Ø12, $a_s=22$ мм, $a'_s=24$ мм, $\mu_s = 0,0109$	3,585 ($\gamma^{ex} = 1,432$)	3,255	4,382	4,271 ($\gamma=1,705$)
	БО-II-2а 201×101мм	B55, $R_{bt,ser}=2,51$ МПа, $E_b=37500$ МПа	А-III (А400), $E_s=203000$ МПа	4Ø14, $a_s=47$ мм, $\mu_s = 0,0306$	2,203 ($\gamma^{ex} = 1,066$)	2,687	3,617	3,426 ($\gamma=1,657$)
	БО-II-2б 201×101мм			4Ø14, $a_s=42$ мм, $\mu_s = 0,0306$	2,407 ($\gamma^{ex} = 1,132$)	2,764	3,721	3,524 ($\gamma=1,657$)
	БО-II-4а 202×100мм		А-III (А400), $E_s=203000$ МПа	1Ø28, $a_s=32$ мм, $\mu_s = 0,0308$	2,367 ($\gamma^{ex} = 1,045$)	2,944	3,963	3,753 ($\gamma=1,657$)
	БО-II-4б 201×99мм			1Ø28, $a_s=40$ мм, $\mu_s = 0,0308$	2,040 ($\gamma^{ex} = 0,961$)	2,757	3,705	3,508 ($\gamma=1,657$)
	БО-II-5а 200×102мм		А-III (А400), $E_s=201000$ МПа	6Ø12, $a_s=37$ мм, $\mu_s = 0,0333$	2,530 ($\gamma^{ex} = 1,136$)	2,895	3,897	3,685 ($\gamma=1,655$)
	БО-II-5б 202×104мм			6Ø12, $a_s=43$ мм, $\mu_s = 0,0333$	2,079 ($\gamma^{ex} = 0,935$)	2,890	3,890	3,680 ($\gamma=1,656$)
БО-III-1а 205×105мм	B90, $R_{bt,ser}=2,78$ МПа, $E_b=40700$ МПа	А-III (А400), $E_s=201000$ МПа	1Ø12, $a_s=29$ мм, $\mu_s = 0,0055$	2,383 ($\gamma^{ex} = 1,101$)	2,813	3,786	3,760 ($\gamma=1,738$)	
БО-III-1б 200×100мм			1Ø12, $a_s=24$ мм, $\mu_s = 0,0055$	2,360 ($\gamma^{ex} = 1,191$)	2,576	3,468	3,434 ($\gamma=1,733$)	
Тошин Д.С. [9]	Б-1 204×120мм	B22,5, $R_{bt,ser}=1,5$ МПа, $E_b=28500$ МПа	А-III (А400), $E_s=205000$ МПа	2Ø8, $a_s=25$ мм, $\mu_s = 0,0041$	2,735 ($\gamma^{ex} = 2,043$)	1,740	2,343	2,351 ($\gamma=1,756$)
	Б-2 202×118мм			2Ø8+2Ø8, $a_s=25$ мм, $a'_s=25$ мм, $\mu_s = 0,0047$	2,169 ($\gamma^{ex} = 1,637$)	1,726	2,324	2,329 ($\gamma=1,749$)
	Б-3 202×120мм			2Ø12+2Ø8, $a_s=25$ мм, $a'_s=25$ мм, $\mu_s = 0,0113$	2,574 ($\gamma^{ex} = 1,762$)	1,899	2,556	2,488 ($\gamma=1,704$)
Нугужин Ж.С. [10]	Б-31-1А 273×151мм	B32,5, $R_{bt,ser}=1,807$ МПа, $E_b=24700$ МПа	А-IV (А600), $E_s=212000$ МПа	2Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0052$	8,5 (7,72)* ($\gamma^{ex} = 2,007$)	5,0	6,731	6,674 ($\gamma=1,735$)
	Б-31-1Б 275×148мм	B32,5, $R_{bt,ser}=1,807$ МПа, $E_b=24700$ МПа	А-IV (А600), $E_s=195000$ МПа	2Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0052$	8,5 (7,64)* ($\gamma^{ex} = 2,012$)	4,935	6,643	6,583 ($\gamma=1,734$)
	Б-31-2А 275×150мм	B32,5, $R_{bt,ser}=1,938$ МПа, $E_b=24200$ МПа	А-IV (А600), $E_s=194000$ МПа	2Ø12+2Ø6, $a_s=20$ мм, $a'_s=20$ мм, $\mu_s = 0,0052$	8,5 (7,8)* ($\gamma^{ex} = 1,882$)	5,387	7,252	7,19 ($\gamma=1,735$)
	Б-31-2Б 281×148мм	B32,5, $R_{bt,ser}=1,938$ МПа, $E_b=24200$ МПа	А-IV (А600), $E_s=208000$ МПа	2Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0061$	8,5 (7,63)* ($\gamma^{ex} = 1,779$)	5,574	7,503	7,442 ($\gamma=1,736$)
	Б-31-3А 281×150мм	B32,5, $R_{bt,ser}=2,014$ МПа, $E_b=24500$ МПа	А-IV (А600), $E_s=191000$ МПа	2Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0051$	8,5 (7,6)* ($\gamma^{ex} = 1,704$)	5,797	7,804	7,744 ($\gamma=1,737$)

Источник	Шифр балки и сечение	Бетон	Арматура	Схема армирования	M_{crc}^{ex} , кН·м	M_{crc}^{th} , кН·м		
						$\gamma = 1,3$	$\gamma = 1,75$	γ по ф. (21)
	Б-31-3Б 275×150мм	B32,5, $R_{bt,ser}=2,014$ МПа, $E_b=24500$ МПа	A-IV (A600), $E_s=192000$ МПа	2Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0053$	8,5 (7,68)* ($\gamma^{ex} = 1,817$)	5,496	7,398	7,335 ($\gamma=1,785$)
	Б-32-1А 273×150мм	B35, $R_{bt,ser}=2,115$ МПа, $E_b=30800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=205000$ МПа	2Ø18+2Ø6, $a_s=20$ мм, $a'_s=20$ мм, $\mu_s = 0,0134$	9,25 (7,85)* ($\gamma^{ex} = 1,578$)	6,468	8,707	8,407 ($\gamma=1,690$)
	Б-32-1Б 275×149мм	B35, $R_{bt,ser}=2,115$ МПа, $E_b=30800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=198000$ МПа	2Ø18+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0134$	9,25 (7,8)* ($\gamma^{ex} = 1,615$)	6,280	8,454	8,140 ($\gamma=1,685$)
	Б-32-2А 276×150мм	B35, $R_{bt,ser}=2,24$ МПа, $E_b=30800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=215000$ МПа	2Ø18+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0132$	9,25 (8)* ($\gamma^{ex} = 1,521$)	6,836	9,202	8,863 ($\gamma=1,686$)
	Б-32-2Б 277×148мм	B35, $R_{bt,ser}=2,24$ МПа, $E_b=30800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=206000$ МПа	2Ø18+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0134$	9,25 (8,12)* ($\gamma^{ex} = 1,563$)	6,754	9,093	8,756 ($\gamma=1,685$)
	Б-32-3А 280×150мм	B35, $R_{bt,ser}=2,23$ МПа, $E_b=32000$ МПа	A-IV (A600), $E_s=203000$ МПа	2Ø18+2Ø6, $a_s=20$ мм, $a'_s=20$ мм, $\mu_s = 0,0129$	9,25 (8,39)* ($\gamma^{ex} = 1,541$)	7,08	9,531	9,183 ($\gamma=1,686$)
	Б-32-3Б 283×148мм	B35, $R_{bt,ser}=2,23$ МПа, $E_b=32000$ МПа	A-IV (A600), $E_s=199000$ МПа	2Ø18+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0129$	9,25 (7,8)* ($\gamma^{ex} = 1,466$)	6,916	9,310	8,97 ($\gamma=1,686$)
	Б-81-1А 284×153мм	B100, $R_{bt,ser}=3,762$ МПа, $E_b=38200$ МПа	A-IV (A600), $E_s=194000$ МПа	3Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0075$	13,75 (10,26)* ($\gamma^{ex} = 1,192$)	11,189	15,062	14,673 ($\gamma=1,705$)
	Б-81-1Б 285×150мм	B100, $R_{bt,ser}=3,762$ МПа, $E_b=38200$ МПа	A-IV (A600), $E_s=207000$ МПа	3Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0076$	13 (10,26)* ($\gamma^{ex} = 1,197$)	11,143	15	14,605 ($\gamma=1,704$)
	Б-81-2А 283×152мм	B100, $R_{bt,ser}=3,868$ МПа, $E_b=41000$ МПа	A-IV (A600), $E_s=197000$ МПа	3Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0075$	13 (9,52)* ($\gamma^{ex} = 1,096$)	11,294	15,203	14,805 ($\gamma=1,704$)
	Б-81-2Б 287×151мм	B100, $R_{bt,ser}=3,868$ МПа, $E_b=41000$ МПа	A-IV (A600), $E_s=196000$ МПа	3Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0076$	13,75 (9,52)* ($\gamma^{ex} = 1,073$)	11,532	15,524	15,122 ($\gamma=1,705$)
	Б-81-3А 284×154мм	B100, $R_{bt,ser}=3,811$ МПа, $E_b=42700$ МПа	A-IV (A600), $E_s=207000$ МПа	3Ø12+2Ø6, $a_s=20$ мм, $a'_s=20$ мм, $\mu_s = 0,0075$	15,25 (9,86)* ($\gamma^{ex} = 1,112$)	11,529	15,519	15,121 ($\gamma=1,705$)
	Б-81-3Б 283×151мм	B100, $R_{bt,ser}=3,811$ МПа, $E_b=42700$ МПа	A-IV (A600), $E_s=196000$ МПа	3Ø12+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0077$	13,75 (9,86)* ($\gamma^{ex} = 1,164$)	11,013	14,825	14,435 ($\gamma=1,704$)
	Б-82-1А 276×151мм	B100, $R_{bt,ser}=3,771$ МПа, $E_b=39200$ МПа	A-IV (A600), $E_s=199000$ МПа	(2Ø18+ +2Ø12)+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0176$	13,75 (12,6)* ($\gamma^{ex} = 1,407$)	11,644	15,674	14,980 ($\gamma=1,673$)
	Б-82-1Б 280×140мм	B100, $R_{bt,ser}=3,771$ МПа, $E_b=39200$ МПа	A-IV (A600), $E_s=197000$ МПа	(2Ø18+ +2Ø12)+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0175$	13,75 (12,6)* ($\gamma^{ex} = 1,457$)	11,238	15,128	14,439 ($\gamma=1,670$)
	Б-82-2А 279×150мм	B100, $R_{bt,ser}=3,837$ МПа, $E_b=36800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=208000$ МПа	(2Ø18+ +2Ø12)+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0176$	13 (12,2)* ($\gamma^{ex} = 1,291$)	12,289	16,543	15,812 ($\gamma=1,673$)
	Б-82-2Б 278×152мм	B100, $R_{bt,ser}=3,874$ МПа, $E_b=36800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=197000$ МПа	(2Ø18+ +2Ø12)+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0175$	13 (11)* ($\gamma^{ex} = 1,162$)	12,306	16,565	15,837 ($\gamma=1,673$)
	Б-82-3А 279×152мм	B100, $R_{bt,ser}=3,774$ МПа, $E_b=35800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=196000$ МПа	(2Ø18+ +2Ø12)+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0174$	13,75 (12,2)* ($\gamma^{ex} = 1,307$)	12,136	16,337	15,620 ($\gamma=1,673$)
	Б-82-3Б 275×148мм	B100, $R_{bt,ser}=3,774$ МПа, $E_b=35800$ МПа	A-IV (A600), $E_s=190000$ МПа	(2Ø18+ +2Ø12)+2Ø6, $a_s=30$ мм, $a'_s=30$ мм, $\mu_s = 0,0182$	13,75 (12,4)* ($\gamma^{ex} = 1,394$)	11,559	15,561	14,864 ($\gamma=1,672$)

Источник	Шифр балки и сечение	Бетон	Арматура	Схема армирования	M_{crc}^{ex} , кН·м	M_{crc}^{th} , кН·м		
						$\gamma = 1,3$	$\gamma = 1,75$	γ по ф. (21)
Уманский А.М. [11]	НсМ-1 100×100	B40, $R_{bt,ser}=2,36$ МПа, $E_b=33152$ МПа	A-III (A400), $E_s=213000$ МПа	2Ø8, $a_s=20$ мм, $\mu_s = 0,01$	0,658 ($\gamma^{ex} = 1,514$)	0,565	0,761	0,739 ($\gamma=1,7$)
Шарафутдинов Л.А. [12]	Б-2 220×120	B25, $R_{bt,ser}=2,074$ МПа, $E_b=30000$ МПа	A400, $E_s=200000$ МПа	2Ø10, $a_s=30$ мм, $\mu_s = 0,06$	«-» (3,380)* ($\gamma^{ex} = 1,543$)	2,847	3,932	3,778 ($\gamma=1,73$)
Atıvalagan, S. [13]	NWC 150×150	B25, $R_{bt,ser}=2,187$ МПа, $E_b=30000$ МПа	A400, $E_s=200000$ МПа	2Ø12, $a_s=16$ мм, $\mu_s = 0,01$	«-» (2,500)* ($\gamma^{ex} = 1,543$)	1,846	2,547	2,475 ($\gamma=1,7$)

Примечания:

1 – * – Вне скобок даны значения моментов трещинообразования, установленных визуально; в скобках – значения моментов, определенных по перелому графика зависимости момента от кривизны.

2 – Серым цветом закрашены ячейки таблицы, в которых приведены значения теоретических моментов, наилучшим образом соответствующие эксперименту.

3 – γ^{ex} – коэффициент пластичности, полученный сравнением экспериментального значения момента трещинообразования с упругим расчётом по формуле $\gamma^{ex} = \frac{M_{crc}^{ex}}{M_{crc}^{th,e}}$.

4 – В некоторых строках не закрашена ни одна ячейка, т.к. $\gamma^{ex} < 1$, поэтому данные эксперимента в строке не могут быть использованы для сравнения.

Выводы:

1 – в целом близкие к эксперименту показали результаты расчёта по предложенной формуле (21), за исключением случаев с высокопрочным бетоном, где может быть применён подход СП 16.13330.2012;

2 – такое существенное влияние прочности бетона на результат противоречит ранее полученным теоретическим выводам (см. анализ таблицы 1) и должно быть учтено в формуле для γ после дополнительного более обстоятельного и масштабного изучения экспериментальных данных (поэтому область применения формулы (21) ограничена пока обычными бетонами В15-В35);

3 – таким образом, для бетонов классов В35-В100 на данном этапе исследований можно рекомендовать подход СП 16.13330.2012;

4 – подход СНиП 2.03.01-84* является частным случаем предложенной формулы (21) и не учитывает влияние не только прочности бетона, но и наличие арматуры в сечении, поэтому при сравнении с экспериментом даёт погрешность от +64 % до -17 %;

5 – экспериментально установлена роль арматуры при определении γ , которая опровергает ранее выявленную теоретически закономерность (см. анализ результатов табл. 1): с увеличением процента армирования от 0,4 % до 3,1 % коэффициент γ^{ex} не растёт, а падает, причём значительно – в 1,9 раза. Это обстоятельство требует проведения дополнительных исследований.

Источник финансирования. Программа фундаментальных научных исследований (ФНИ) Минстроя России и РААСН в области архитектуры, градостроительства и строительных наук на 2018 год.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гвоздев А.А., Дмитриев С.А. К расчёту предварительно напряженных железобетонных и бетонных сечений по образованию трещин // Бетон и железобетон. 1957. № 5. С. 205–211.
2. Алмазов В.О. Проектирование железобетонных конструкций по евро нормам. М.: ЛитРес, 2016. 217 с.

3. Биби Э.В., Нароян Р.С. Руководство для проектировщиков к Еврокоду 2: проектирование железобетонных конструкций. М.: МГСУ, 2013. 292 с.

4. Tyler G. Hicks. Civil engineering formulas, 3d ed. New-York: McGRAW-HILL, 2016. 472 p.

5. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Совершенствование методики расчета изгибаемых железобетонных элементов без предварительного напряжения по образованию нормальных трещин // Строительные материалы. 2013. № 6. С. 54–55.

6. Карпенко Н.И., Радайкин О.В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2012. №3(41). С. 10–17.

7. Пирадов К.А. Теоретические и экспериментальные основы механики разрушения бетона и железобетона. Тбилиси, 1998. 355 с.

8. Ватагин С.С. Связь между напряжениями и деформациями бетона в сжатой зоне железобетонных элементов. Интегральная оценка работы растянутого бетона: дисс. канд. техн. наук. Киев: НИИСК, 1986. 134 с.

9. Тошин Д. С. Нелинейный расчет деформаций изгибаемых железобетонных элементов

при разгрузке с применением деформационной модели: дисс. канд. техн. наук. Тольятти, 2009. 132 с.

10. Нугужинов Ж.С. Деформации и ширина раскрытия трещин изгибаемых железобетонных элементов при многократно повторных нагружениях: дисс. канд. техн. наук. М.: НИИЖБ, 1986. 197 с.

11. Уманский А.М. Совершенствование методов расчета конструкций морских гидротехнических сооружений из композитбетона с использованием базальтопластиковой арматуры: дисс. канд. техн. наук. Владивосток: Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), 2017. 173 с.

12. Шарафутдинов Л.А. Совершенствование методики расчёта усиления изгибаемых железобетонных элементов сталефибробетоном с применением нелинейной деформационной модели: дис. магист. техн. и технолог. Казань: Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2017. 156 с.

13. Arivalagan S. Flexural Behaviour of Reinforced Concrete Beam Containing Steel Slag as Coarse Aggregate // International Journal of Structural and Civil Engineering. 2012. Vol. 1. Issue 1. Pp. 1–10.

Информация об авторах

Радайкин Олег Валерьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры железобетонных и каменные конструкции.

E-mail: olegxxii@mail.ru.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет.
Россия, 420043, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1.

Поступила в феврале 2018 г.

© Радайкин О.В., 2018

O.V. Radaikin

TO DETERMINATION OF THE CRACKING MOMENT FOR BENDING REINFORCED CONCRETE ELEMENTS WITH ACCOUNT OF PLASTIC DEFORMATIONS OF CONCRETE IN THE TENSION AREA

At the standard calculation of the cracking moment for bending reinforced concrete elements the plasticity coefficient γ is normally used, which according to SP 63.13330.2012 is 35% less than in the old SNiP 2.03.01-84. The question arises, what is the reason for such a noticeable difference and which of the methods gives more reliable results? This article seeks to answer this question. For this purpose the physical meaning of the coefficient γ was considered in detail, with the usage of a nonlinear deformation model of a normal section. A calculation formula for γ depending on an element's reinforcement degree was obtained, which is valid for conventional concrete of B15-B35 class. A comparison of the calculated cracking moment according to the proposed method with experiments by the other authors was carried out. A good agreement of results was observed.*

Keywords: reinforced concrete, cracking moment, plasticity coefficient, plastic moment of resistance.

REFERENCES

1. Gvozdev A.A., Dmitriev S.A. To the calculation of prestressed reinforced concrete and a ceramic stage for the formation of the train // Concrete and reinforced concrete, 1957, no. 5, pp. 205–211.

2. Almasov V.O. Design of reinforced concrete structures in accordance with European standards. Moscow: LitRes, 2016, 217 p.

3. Bibi E.V., Narojan R.S. Leadership for the project to Brocade 2: design of concrete structures. Moscow: MGSU, 2013, 292 p.

4. Tyler G. Hicks. Civil engineering formulas, 3d ed. New-York: McGRAW-HILL, 2016, 472 p.

5. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaikin O.V. Improvement of the calculating method of the the cracking moment of reinforced concrete bending elements without prestressing // Stroitel'nye Materialy, 2013, no. 6, pp. 54–55.

6. Karpenko N.I., Radaikin O.V. The improvement of the stress-strain diagram of concrete to determine the moment of cracking and damaging moment in bending reinforced concrete element // Construction and reconstruction, 2012, no. 3 (41), pp. 10–17.

7. Piradov K.A. Theoretical and experimental foundations of concrete and reinforced concrete fracture mechanics. Tbilisi, 1998, 355 p.

8. Vatagin S.S. The relation between stress and deformation of concrete in the sitting area of the reinforced concrete elements. Integral assessment of the work of the sprawling concrete. Thesis of technical Sciences. Kyiv: NIICK, 1986, 134 p.

9. Toshin D.S. Nonlinear calculation of deformations of bent reinforced concrete elements during

unloading with the use of deformation model. Thesis of technical Sciences. Togliatti, 2009, 132 p.

10. Noginov J.S. Deformation and crack widths of reinforced concrete bending elements when not repeatedly re-loadings. Thesis of technical Sciences. Moscow: NIIZHB, 1986, 197 p.

11. Umansky M.A. Improvement of methods of calculation of structures of marine hydraulic structures of composition using basalt rebar. Thesis of technical Sciences. Vladivostok: Far-Eastern Federal University (FEFU), 201, 173 p.

12. Sharafutdinov L.A. Improved methods of calculating the gain of bendable concrete elements with steel fiber concrete with the use of nonlinear deformation models. Master's thesis. Kazan: Kazan state University of architecture and civil engineering, 2017, 156 p.

13. Arivalagan S. Flexural Behaviour of Reinforced Concrete Beam Containing Steel Slag as Coarse Aggregate // International Journal of Structural and Civil Engineering, 2012, vol. 1, issue 1, pp. 1–10.

Information about the author

Oleg V. Radaikin, PhD, Assistant professor.

E-mail: olegxxii@mail.ru.

Kazan State University of Architecture and Engineering.
Russia, 420043, Kazan, Green str., 1.

Received in February 2018