DOI: 10.34031/2071-7318-2026-11-4-38-44

Юрьев А.Г., *Панченко Л.А.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
**E-mail: Panchenko.bstu@mail.ru*

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ РАМЫ

Аннотация. *В основе теории синтеза конструкций лежит принцип стационарного действия. Фундаментальное начало проекта конструкции составляют вариационные принципы синтеза с энергетическим содержанием. Изменение величин энергии внешних сил и потенциальной энергии деформации зависит не только от изменений перемещений и внутренних сил, что отражают принципы Лагранжа и Кастильяно, но и от вариантов конфигурации тела и модулей материалов. Влияние этих факторов на потенциальную энергию деформации обсуждается на примере рамы. Функционал Кастильяно расширен за счет дополнительных условий с множителями Лагранжа. Из внутренних усилий выделены изгибающие моменты и продольные силы с коэффициентами устойчивости равновесия стержня, которые задаются по нормам проектирования. В основу решения задачи положено условие стационарности функционала, из которого вытекают уравнения структурообразования в отношении формы и размеров поперечного сечения, модулей материала. Они рассматриваются как критерии оптимальности конструкции, вытекающие из вариационной постановки задачи. При дополнительном условии в виде ограничения на перемещение эти уравнения имеют интегральный характер, при заданном напряжении выглядят как уравнения третьей степени. Энергетическое начало обеспечивает выпуклость задачи и нацеленность на абсолютный экстремум функционала. Для этого достаточно исходному функционалу и функциям ограничений быть выпуклыми над векторами переменных проекта.*

Ключевые слова: *Стержневая система, синтез конструкций, вариационные принципы, уравнения структурообразования, минимум объема материала.*

Введение. В 1744 году французский ученый П. Мопертюи сформулировал принцип наименьшего действия, имеющий энергетическое содержание и ставший впоследствии общефизическим вариационным принципом стационарного действия.

Решающую роль в развитии принципа сыграл французский математик и механик Ж. Лагранж. Для деформируемого тела используется его вариационный принцип: в случае равновесия системы с двусторонними связями сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю. При линейном физическом законе функционал системы равен по модулю функционалу потенциальной энергии деформации.

Классическая теория сооружений ориентирована в первую очередь на анализ напряженно-деформированного состояния (НДС). Однако наряду с этим развивалось направление синтеза систем. Решение обратных задач строительной механики не преследует цель достичь некоторого наилучшего (оптимального) решения. При заданных элементах НДС определяются лишь соответствующие форма тела и материал.

Стремление доставить рассматриваемой системе некоторое экстремальное свойство определяет оптимальное проектирование. Одной из первых задач такого рода была изопериметрическая задача при заданном объеме (поверхности) системы. В то же время оказалась возможной двойственная постановка задачи: минимизация объема (поверхности) при дополнительном условии с энергетическим содержанием (соответствие принципу стационарного действия). Появились теоремы Васютинского и выводы В. Прагера о взаимосвязи минимумов потенциальной энергии деформации и объема (поверхности) тела [1–5].

Всякое уклонение от рассмотренных установок оптимального проектирования приводит к вымыванию основ механики деформируемого твердого тела в угоду субъективным критериям [6–10]. Энергетическое начало обеспечивает выпуклость задачи и нацеленность на абсолютный экстремум функционала. Для этого достаточно исходному функционалу и функциям ограничений быть выпуклыми над векторами переменных проекта.

В настоящий момент методики структурной оптимизации можно классифицировать на две категории: оптимизация дискретных элементов, использующая элементы балки или фермы, и реализация оптимального континуума.

Внутри класса методик дискретных элементов для конструкционных систем предложен метод для стержневого варианта рамы, в котором переменные проекта представлены характеристиками поперечного сечения, включая главные оси инерции.

Теория графов использована для регулирования расположения опор в зависимости от траекторий нагрузки для стержневых систем. При оптимизации конструкции рамы в качестве проектного критерия находит использование максимальный по модулю изгибающий момент.

Ко второй категории относится методика с использованием элементов континуума для определения оптимальной системы при статической и динамической нагрузках. Другая методика предложена для оптимизации топологии каркаса сооружения с позиций устойчивости его равновесия. Целевой функцией является критическая нагрузка, синхронная степени податливости системы.

Каждая из представленных методик важна сама по себе, что не исключает их рационального синтеза, то есть комбинирования идей дискретного и континуального проектирования. Интегрированный подход использован при оптимизации многоэтажного металлического каркаса. В основание положена континуальная сетка из четырехугольников и балочные элементы, а также критерий минимума потенциальной энергии деформации. Такого рода оптимизацию можно рассматривать как существенный шаг в процедуре инженерного комбинирования с современными проектными кодами, приемлемого для установления рациональных топологии, конфигурации и размеров элементов.

Таким образом, упомянутый выше принцип стационарного действия стал фундаментальным началом в новой стратегии оптимизации стержневых систем, в частности рам.

Методика. Синтез стержневой системы может рассматриваться с позиций ее топологии, геометрии и параметров элементов [11–15]. Остановимся на системе из двух стержней с заданными топологией и геометрией. В качестве варьируемых параметров рассматриваются переменные по длинам стержней диаметры поперечных сечений, а также переменные по длинам стержней модули Юнга. В качестве дополнительных условий приняты перемещение и наибольшее по модулю напряжение.

В случае перемещения задача приобретает изопериметрический характер и имеет двойственную постановку. В случае напряжения дополнительное условие не является интегральной связью. В то же время решение задачи такого рода для консоли показало возможность двойственной ее постановки [16]. В обоих случаях при определении формы тела в качестве исходного функционала принимается объем материала.

В задаче синтеза системы с переменным модулем Юнга в качестве исходного функционала принимается интегральный модуль Юнга, имеющий размерность энергии.

Линеаризация процедуры оптимального проектирования, в том числе в конечно-элементной интерпретации, а также в связи с возможной физической и геометрической нелинейностью, ведется по методу дополнительных нагрузок [17, 18].

Из условия стационарности обобщенного функционала, полученного с помощью множителей Лагранжа, вытекают специфические уравнения синтеза системы, играющие роль критерия оптимальности. Вместе с уравнениями из дополнительных условий они образуют систему, решение которой составляют варьируемые параметры.

Решение задачи синтеза завершается проверкой удовлетворения неучтенным ограничениям, в том числе условий прочности в случае дополнительных условий в виде перемещений. Возможно использование дискретного варьирования [19, 20].

Основная часть. Рамой (жесткой рамой) принято называть такую стержневую систему, у которой все или некоторые узловые соединения являются жесткими. Жесткий узел отличается тем, что угол между осями образующих его стержней остается постоянным при действии внешних сил. Это означает, что при деформировании рамы обе касательные к упругим линиям стержней поворачиваются на одинаковый угол.

В раме изгибающие моменты горизонтальных элементов оказываются, как правило, значительно меньше, чем в простой балке того же пролета, что приводит к более экономичным сечениям этих элементов. Конструктивное обеспечение достаточной жесткости осуществляется проще, чем достижение шарнирной подвижности.

Геометрическая неизменяемость рамы с жесткими узлами достигается при наличии гораздо меньшего числа стержней, чем неизменяемость шарнирно-стержневой системы. Указанные достоинства рам обеспечили им широкое применение в различных отраслях техники.

Как и в балочных системах, поперечные силы в элементах рамы оказывают незначительное влияние на ее напряженно-деформированное состояние. В целях упрощения расчета ими обычно пренебрегают. Учет продольных сил вызывает необходимость обеспечения устойчивости равновесия сжатых стержней и введения коэффициента устойчивости.

В так называемой линейной строительной механике, помимо принятия закона Гука, считается, что все деформации и перемещения весьма малы по сравнению с директивными размерами заданной системы. Возникающая неточность расчета оказывается ничтожной. Зато значительно упрощаются все расчеты, касающиеся подавляющего большинства систем.

Упрощение расчетной схемы рамы касается пренебрежения второстепенными факторами, относящимися как к схеме рамы, так и к приложенной нагрузке. Особое внимание уделяется регулированию опорных связей, что осуществляется на этапе формирования ее топологии.

Стержневая система нагружена силой F (рис. 1). При заданном модуле Юнга E, перемещении опоры A величиной u_0 требуется определить диаметры поперечных сечений $d_1(x_1)$ на участке длиной l и $d_2(x_2)$ на участке длиной h.

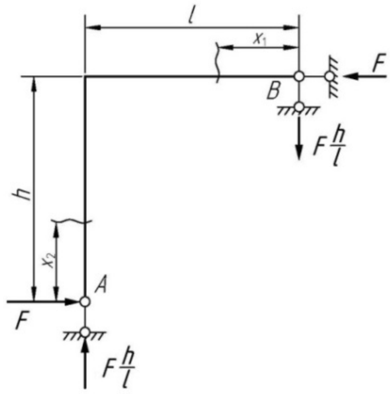

Рис.1. Стержневая система

На рис.1 показаны реакции опор A и B. Потенциальную энергию деформации поставим в зависимость от изгибающих моментов $M(x)$ и продольной силы N:

$$J=\int_0^l \frac{M^2(x_1)dx_1}{2EI_1(x_1)}+\int_0^l \frac{N^2dx_1}{2E\varphi_1^2A_1(x_1)}+\int_0^h \frac{M^2(x_2)dx_2}{2EI_2(x_2)}+\int_0^h \frac{N^2dx_2}{2E\varphi_2^2A_2(x_2)}, \tag{1}$$

где A и I – площадь и момент инерции поперечного сечения стержня, φ – коэффициент устойчивости равновесия стержня, который задается по нормам проектирования.

Перемещение точки A $u=\partial J/\partial F$ представим в виде:

$$u=\frac{4F}{\pi E}\left[16\frac{h}{l}\int_0^l \frac{x_1^2dx_1}{d_1^4(x_1)}+\int_0^l \frac{dx_1}{\varphi_1^2d_1^2(x_1)}+16\int_0^h \frac{x_2^2dx_2}{d_2^4(x_2)}+\frac{h}{l}\int_0^h \frac{dx_2}{\varphi_2^2d_2^2(x_2)}\right]. \tag{2}$$

При заданном перемещении u_0 функционал объема имеет вид:

$$V=\frac{\pi}{4}\left[\int_0^l d_1^2(x_1)dx_1+\int_0^h d_2^2(x_2)dx_2\right]+\mu\left\{\frac{4F}{\pi E}\left[16\frac{h}{l}\int_0^l \frac{x_1^2dx_1}{d_1^4(x_1)}+\int_0^l \frac{dx_1}{\varphi_1^2d_1^2(x_1)}+16\int_0^h \frac{x_2^2dx_2}{d_2^4(x_2)}+\frac{h}{l}\int_0^h \frac{dx_2}{\varphi_2^2d_2^2(x_2)}\right]-u_0\right\}. \tag{3}$$

Условие его стационарности выражается в виде равенства нулю его вариации:

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial d_1(x_1)}\delta d_1(x_1)+\frac{\partial V}{\partial d_2(x_2)}\delta d_2(x_2)+\frac{\partial V}{\partial \mu}\delta\mu=0. \tag{4}$$

Из условий $\partial V/\partial d_1(x_1)=0$, $\partial V/\partial d_2(x_2)=0$ вытекают уравнения:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^l d_1(x_1)dx_1-\mu\frac{4F}{\pi E}\left[80\frac{h}{l}\int_0^l \frac{x_1^2dx_1}{d_1^5(x_1)}+3\int_0^l \frac{dx_1}{\varphi_1^2d_1^3(x_1)}\right]=0, \tag{5}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^h d_2(x_2)dx_2-\mu\frac{4F}{\pi E}\left[80\int_0^h \frac{x_2^2dx_2}{d_2^5(x_2)}+\frac{3h}{l\varphi_2^2}\int_0^h \frac{dx_2}{d_2^3(x_2)}\right]=0. \tag{6}$$

Из условия $\partial V/\partial\mu=0$ следует уравнение:

$$\frac{4F}{\pi E}\left[16\frac{h}{l}\int_0^l \frac{x_1^2dx_1}{d_1^4(x_1)}+\int_0^l \frac{dx_1}{\varphi_1^2d_1^2(x_1)}+16\int_0^h \frac{x_2^2dx_2}{d_2^4(x_2)}+\frac{h}{\varphi_2^2 l}\int_0^l \frac{dx_2}{d_2^2(x_2)}\right]-u_0=0. \tag{7}$$

Для неизвестных $d_1(x)$, $d_2(x)$, μ получаем систему интегральных уравнений (5) – (7). Для ее решения можно использовать метод последовательных приближений.

Сохраним исходные данные предыдущего примера за исключением переменных d_1 и d_2, замененных на переменные модули E_1 и E_2. Закон Гука сохраняется, но меняет свой масштаб от сечения к сечению. Такую композицию можно создать, например, на базе бетонов различных классов.

Формирование функционала ведем на основе функции интегрального модуля Юнга с размерностью энергии:

$$\tilde{E}=\frac{\pi}{4}\left[d_1^2\int_0^l E_1(x_1)dx_1+d_2^2\int_0^h E_2(x_2)dx_2\right]+\mu\left\{\frac{4F}{\pi}\left[16\frac{h}{l}\int_0^l \frac{x_1^2dx_1}{d_1^4E_1(x_1)}+\int_0^l \frac{dx_1}{\varphi_1^2d_1^2E_1(x_1)}+16\int_0^h \frac{x_2^2dx_2}{d_2^4E_2(x_2)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h}{l}\int_0^h \frac{dx_2}{\varphi_2^2d_2^2E_2(x_2)}\right]-u_0\right\}. \tag{8}$$

Условие его стационарности представляем в виде:

$$\delta\tilde{E} = \frac{\partial\tilde{E}}{\partial E_1(x_1)}\delta E_1(x) + \frac{\partial\tilde{E}}{\partial E_2(x_2)}\delta E_2(x) + \frac{\partial\tilde{E}}{\partial\mu}\delta\mu = 0. \quad (9)$$

Из условия $\partial\tilde{E}\ /\ \partial E_1(x_1)$ вытекает уравнение:

$$1 - \mu\frac{16F}{\pi^2 d_1^2 l}\left[16\frac{h}{l}\int_0^l \frac{x_1^2 dx_1}{d_1^4 E_1^2(x_1)} + \int_0^l \frac{dx_1}{\varphi_1^2 d_1^2 E_1^2(x_1)}\right] = 0. \quad (10)$$

Из условия $\partial\tilde{E}\ /\ \partial E_2(x_2)$ следует уравнение:

$$1 - \mu\frac{16F}{\pi^2 d_2^2 h}\left[16\int_0^h \frac{x_2^2 dx_2}{d_2^4 E_2^2(x_2)} + \frac{h}{l}\int_0^h \frac{dx_2}{\varphi_2^2 d_2^2 E_2^2(x_2)}\right] = 0. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (11) получаем синтезирующее уравнение:

$$\frac{1}{d_1^2 l}\left[\int_0^l \frac{1}{d_1^2 E_1^2(x_1)}\left(\frac{16h}{l}\frac{x_1^2}{d_1^2} + \frac{1}{\varphi_1^2}\right)dx_1\right] - \frac{1}{d_2^2 h}\left[\int_0^h \frac{1}{d_2^2 E_2^2(x_2)}\left(\frac{16x_2^2}{d_2^2} + \frac{h}{l\varphi_2^2}\right)dx_2\right] = 0. \quad (12)$$

Из условия $\partial\tilde{E}/\partial\mu = 0$ вытекает уравнение:

$$\frac{4F}{\pi}\left[\int_0^l \frac{1}{d_1^2 E_1(x_1)}\left(\frac{16hx_1^2}{ld_1^2} + \frac{1}{\varphi_1^2}\right)dx_1 + \int_0^h \frac{1}{d_2^2 E_2(x_2)}\left(\frac{16x_2^2}{d_2^2} + \frac{h}{l\varphi_2^2}\right)dx_2\right] - u_0 = 0. \quad (13)$$

Для неизвестных $E_1(x_1)$, $E_2(x_2)$, μ получаем систему интегральных уравнений (12), (13).

Сохраним исходные данные первого примера за исключением перемещения u_0, замененного на наибольшее по модулю напряжение σ_0.

Заметим, что это условие не является интегральной связью. Но, как указано выше, решение задачи такого рода для консоли [16] обнаружило возможность двойственной ее постановки при использовании функционалов потенциальной энергии деформаций и объема материала.

Функционал объема имеет вид:

$$V = \frac{\pi}{4}\left[\int_0^l d_1^2(x_1)dx_1 + \int_0^h d_2^2(x_2)dx_2\right] + \mu_1\left[\frac{4F}{\pi\varphi_1 d_1^2(x_1)} + \frac{32Fhx_1}{\pi l d_1^3(x_1)} - \sigma_0\right] + \mu_2\left[\frac{4Fh}{\pi\varphi_2 l d_2^2(x_2)} + \frac{32Fx_2}{\pi d_2^3(x_2)} - \sigma_0\right]. \quad (14)$$

Условие его стационарности представляем в виде:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial d_1(x_1)}\delta d(x_1) + \frac{\partial V}{\partial d_2(x_2)}\delta d(x_2) + \frac{\partial V}{\partial\mu_1}\delta\mu_1 + \frac{\partial V}{\partial\mu_2}\delta\mu_2. \quad (15)$$

Из условий $dV/\partial d_1(x_1) = 0$, $dV/\partial d_2(x_2) = 0$ вытекают уравнения:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^l d_1^2(x_1)dx_1 - \mu_1\left[\frac{8F}{\pi\varphi_1 d_1^3(x_1)} + \frac{96Fhx_1}{\pi l d_1^4(x_1)}\right] = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^h d_2^2(x_2)dx_2 - \mu_2\left[\frac{8Fh}{\pi\varphi_2 l d_2^3(x_2)} + \frac{96Fx_2}{\pi d_2^4(x_2)}\right] = 0. \quad (17)$$

Из условий $dV/\partial\mu_1 = 0$ и $dV/\partial\mu_2 = 0$ следуют уравнения:

$$\frac{4F}{\pi\varphi_1 d_1^2(x_1)} + \frac{32Fhx_1}{\pi l d_1^3(x_1)} = \sigma_0, \quad (18)$$

$$\frac{4Fh}{\pi\varphi_2 l d_2^2(x_2)} + \frac{32Fx_2}{\pi d_2^3(x_1)} = \sigma_0, \quad (19)$$

или

$$\pi\varphi_1 l\sigma_0 d_1^3(x_1) - 4Fld_1(x_1) - 32Fh\varphi_1 x_1 = 0, \quad (20)$$

$$\pi\varphi_2 l\sigma_0 d_2^3(x_2) - 4Fhd_2(x_2) - 32F\varphi_2 l x_2 = 0. \quad (21)$$

Приводим уравнение (20) к стандартному виду:

$$d_1^3(x_1) - \frac{4F}{\pi\varphi_1\sigma_0}d_1(x_1) - \frac{32Fhx_1}{\pi l\sigma_0} = 0, \quad (22)$$

или

$$d_1^3(x_1) + 3pd_1(x_1) - 2q = 0. \quad (23)$$

Определяем детерминант:

$$D = q^2 + p^2 = \left(\frac{16Fhx_1}{\pi l\sigma_0}\right)^2 - \left(\frac{4F}{3\pi\varphi_1\sigma_0}\right)^3. \quad (24)$$

При наиболее распространенных условиях нагружения он оказывается больше нуля. При $p < 0$ уравнение имеет одно действительное решение. Вспомогательная величина угла определяется из формулы:

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{q}{r^3}, \quad (25)$$

где $q = -\frac{1}{2}(32Fhx_1)/(\pi l\sigma_0)$, то есть зависит от координаты x_1. В связи с этим вычисляются дискретные значения $d_1(x_1)$, а по ним строится аппроксимирующая линия, образующая поверхность горизонтального стержня рамы:

$$d_1(x_1) = -2r\operatorname{ch}(\alpha/3), \quad (26)$$

где $r = -\sqrt{|p|}$ (знак *r* должен совпадать со знаком *q*),

$$p = -\frac{4F}{3\pi\varphi_1\sigma_0}. \quad (27)$$

Таким же образом из уравнения (21) определяется диаметр $d_2(x_2)$ и поверхность вертикального стержня рамы. Из уравнений (16) и (17) можно определить, при необходимости, множители μ_1 и μ_2.

В рассматриваемом примере введение прямоугольного или кольцевого сечения с варьированием обоих его параметров приводит к системе пяти уравнений.

Нарастание варьируемых параметров сечения ведет к увеличению порядка системы уравнений. В связи с этим можно использовать принятое в технической литературе соотношение $I = kA$, где k – переменный коэффициент (для прямоугольного сечения $\frac{h^2}{12}$). Варьируются величины A и k, которые и определяют размеры сечения стержня. При этом для коэффициента k возможны альтернативные варианты формы, в том числе и составные сечения. Выбор рациональной формы определяется конструктивными соображениями.

Выводы. В структурном синтезе рамы используются соответствующие ей устоявшиеся допущения. Не учитываются поперечные силы ввиду их незначительного влияния на напряженно-деформированное состояние. Рассматривается линейная задача строительной механики, то есть при линейном физическом законе и малости деформаций и перемещений. Вместе с тем обращено внимание на обеспечение устойчивости равновесия сжатых стержней.

Минимизация объема материала объекта исследования согласована с вариационными принципами механики деформируемого твердого тела, проистекающими из общефизического принципа стационарного действия. При решении примеров структурного синтеза рамы более приемлемым оказался обобщенный принцип Кастильяно, позволяющий, в частности, одновременно решать проблему устойчивости равновесия стержня в соответствии с нормативными требованиями.

Предложенная методика структурного синтеза рамы открывает перспективы решения задач с многочисленными варьируемыми параметрами, присущими усложненным сечениям стержней, число которых не регламентируется.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equale strength // Bulletin de L' Academie Polonaise des Sciences, Series des Sciences Techniques. 1960. Vol. 8. No 6. Pp. 259–268.

2. Prager W., Taylor J.E. Problems of optimal structural design // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35. No 1. Pp. 102–106.

3. Seguchi Y., Tada Y. Shape determination problems of structures by inverse variational principle / the finite element formulation // Acta Techica CSAV. 1979. Vol. 24. No. 2.

4. Перельмутер А.В. Задачи синтеза в теории сооружений (краткий исторический обзор) // Вестник Томск. гос. арх.- строит. ун-та, 2016. № 2. С. 70–106.

5. Тамразян А.Г., Алексейцев А.В. Современные методы оптимизации конструктивных решений для несущих систем зданий и сооружений // Вестник МГСУ. 2020. Т.15. В.1. С. 12–30. DOI:10.22227/1997.0935.2020. 1. 12 – 30.

6. Majid K. I. Optimum design of structures. London: Newnes-Butterworths. 1979. 238 p.

7. Stromberg L.L., Beghini A., Baker W.P., Paulino G.H. Topology optimization for braced frames: combining continuum and beam/column elements // Engineering Structures. 2012. No 37. Pp. 106–124.

8. Ritchie P.A., Thomas D.A., Lu Le-Wu, Connelly G.M. External reinforcement of concrete beams using fiber reinforced plastics // ACI Structural Journal, 1991. No. 4. Pp. 490–499.

9. Grase N.F., Singh S. B. Design approach for carbon fiber-reinforeed polymer prestressed concrete bridge beams // ACI Structural Journal. 2003. May- June. Pp. 365–376.

10. Knowles R.B., Park P. Strength of concrete - filled steel tubular columns // ASCE Vol. 95. 1969. No 12. Pp. 2565 - 2587.

11. Panchenko L.A., Druzhinina T.Y. Energetic basis in rational constructions projection // Magasine of Civil Engineering. 2024. No. 17(8). 13205. DOI:10.34910/MCE 132. 5.

12. Zinkova V.A., Yuriev A.G., Peshkova E.V. Designing of tube trusses without gusset plate with joint connections // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. No 5. Vol. 10. Pp. 12391–12398.

13. Юрьев А.Г., Толбатов А.А., Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Рациональные сечения бруса при косом изгибе // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2017. № 11. С. 60–63. DOI: 10.12737/Article -5a001ab28c2460. 04912816.

14. Панченко Л.А., Зинькова В.А., Юрьев А.Г. Структурный синтез стержневых систем // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2022. № 10. С. 34–40. DOI: 10.34031/2071-7318-2022-7-10-34-40.

15. Zinkova V. A. Optimization of the structure of flat metal tube trusses // Lecture Notes in Civil Engineering. 95. Innovations and Technologies in Construction. BUILDINTECH BIT 2020. Springer. Cham, 2021. Pp. 213–218. DOI:10.1007/578-3-030-54652-6-32.

16. Зинькова В. А. Формы консоли на основе вариационного принципа Кастильяно // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2024. № 6 (58).

17. Юрьев А.Г., Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Перемещения в стержневых системах за пределом упругости // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2022. № 3. С. 25–31. DOI:10. 34031/2071-7318-2021-7-3-25-31.

18. Юрьев А.Г., Зинькова В.А. Нелинейные задачи косого изгиба // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2023. № 11. С. 37–45. DOI:10.34031/2071-7318-2023-8-11-37-45.

19. Панченко Л.А., Юрьев А. Г. Бетонные балки с дисперсным и внешним армированием // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ». 2024. № 5. С. 52–66. DOI:10.26297/2312-9409.2024.5.15.

20. Ma J., Jan H., Zhang J., Zhang P. Enhancing concrete performance: A comprehensive review of hybrid fiber reinforced concrete // Structures. 2024. Vol. 64. Article No 106560. DOI: 10.1016/j. istruc. 2024. 106560.

Информация об авторах

Юрьев Александр Гаврилович, доктор технических наук, профессор. E-mail: yuriev_ag@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д.46.

Панченко Лариса Александровна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. E-mail: panchenko.bstu@mail.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д.46.

Поступила 27.09.2025 г.

Yuriev A.G., *Panchenko L.A.
Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov
**E-mail: panchenko.bstu@.mail.ru*

STRUCTURAL SYNTHESIS OF THE FRAME

Abstract. *The theory of structural synthesis is based on the principle of stationary action. The fundamental basis of a structural design project is the variational principles of synthesis with energy content. The change in the energy of external forces and the potential energy of deformation depends not only on the changes in displacements and internal forces, which are reflected in the principles of Lagrange and Castigliano, but also on the configuration of the body and the modules of materials. The influence of these factors on the potential energy of deformation is discussed using the example of a frame. The Castigliano functional is extended with additional conditions using Lagrange multipliers. From the internal forces, the bending moments and longitudinal forces are selected with the coefficients of stability of the equilibrium of the rod, which are set by the design standards. The solution of the problem is based on the condition of stationarity of the functional, from which the equations of structure formation in relation to the shape and dimensions of the cross-section, the modules of the material follow. They are considered as the criteria of the design optimality, arising from the variational formulation of the problem. With an additional condition in the form of a restriction on the movement, these equations have an integral character, with a given stress they look like equations of the third degree. The energy principle ensures the convexity of the problem and the focus on the absolute extremum of the functional. For this, it is enough for the initial functional and the constraint functions to be convex over the vectors of the project variables.*

Keywords*: Rod system, synthesis of structures, variational principles, equations of structure formation, minimum volume of material.*

REFERENCES

1. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equale strength. Bulletin de L' Academie Polonaise des Sciences, Series des Sciences Techniques. 1960. Vol. 8. No 6. Pp. 259–268.

2. Prager W., Taylor J. E. Problems of optimal structural design. Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35. No 1. Pp. 102–106.

3. Seguchi Y., Tada Y. Shape determination problems of structures by inverse variational principle / the finite element formulation. Acta Techica CSAV. 1979. Vol. 24. No. 2.

4. Perelmuter A.V. Synthesis problems in the theory of structures (brief historical review) [Zadachi sinteza v teorii sooruzhenij (kratkij istoricheskij obzor)]. Bulletin of Tomskij SABU. 2016. No 2. Pp.70–106. (rus)

5. Tamrazjan A.G., Aleksejtsev A.V. Modern methods of optimizing structural solutions for load–

bearing systems of buildings and structures [Sovremennye metody optimizatsii konstruktivnyh reshenij dlja nesushchih sistem zdanij i sooruzhenij]. Bulletin of the MGSU. Vol.15. No 1. 2020. Pp. 12-30. DOI: 10.22227/1997.0935.2020. 1.12 – 30. (rus)

6. Majid K.I. Optimum design of structures. London: Newnes-Butterworths 1979. 238 p.

7. Stromberg L.L., Beghini A., Baker W.P., Paulino G.H. Topology optimization for braced frames: combining continuum and beam/column elements. Engineering Structures. 2012. No 37. Pp. 106–124.

8. Ritchie P.A., Thomas D.A., Lu Le-Wu, Connelly G.M. External reinforcement of concrete beams using fiber reinforced plastics. ACI Structural Journal, 1991. No 4. Pp. 490–499.

9. Grase N.F., Singh S.B. Design approach for carbon fiber-reinforeed polymer prestressed concrete bridge beams. ACI Structural Journal. 2003. May- June. Pp. 365–376.

10. Knowles R.B., Park P. Strength of concrete - filled steel tubular columns. ASCE Vol. 95. 1969. No 12. Pp. 2565–2587.

11. Panchenko L.A., Druzhinina T.Y. Energetic basis in rational constructions projection // Magasine of Civil Engineering. 2024. No 17(8). 13205. DOI:10.34910/MCE 132. 5.

12. Zinkova V.A., Yuriev A.G., Peshkova E.V. Designing of tube trusses without gusset plate with joint connections. International Journal of Applied Engineering Research. 2015. No 5. Vol. 10. Pp. 12391–12398.

13. Yuriev A.G., Tolbatov A.A., Smoljago N.A., Yakovlev O.A. Rational cross-section of a beam under oblique bend [Racional'noe sechenie brusa pri kosom izgibe]. Bulletin of BSTU named after V. G. Shukhov. 2017. No 11. Pp. 60–63. DOI:10.12737/Article-Sa001ab 28c 2460. 04912816. (rus)

14. Panchenko L.A., Zinkova V.A., Yuriev A.G. Constructions synthesis of pivotal systems [Strukturnyi sintez sterzhnevyh system]. Bulletin of BSTU named after V. G. Shukhov. 2022. No 10. Pp. 34-40. DOI:10.34031/2071-7318-2022-7-10-34-40. (rus)

15. Zinkova V.A. Optimization of the structure of flat metal tube trusses. Lecture Notes in Civil Engineering. 95. Innovations and Technologies in Construction. BUILDINTECH BIT 2020. Springer. Cham, 2021. Pp. 213–218. DOI:10.1007/578-3-030-54652-6-32.

16. Zinkova V.A. Console shapes based on Castigliano variational principle [Formy konsoli na osnove variacionnogo principa Kastil'jano]. Bulletin of the Engineering School DVFU. 2024. No. 6 (58). (rus)

17. Yuriev A.G., Smoljago N.A., Yakovlev O.A. Displacements in pivotal systems over elasticity [Peremeshcheniya v sterzhnevyh sistemah za predelom uprugosti]. Bulletin of the BSTU named after V.G. Shukhov. 2022. No 3. Pp. 25–31. DOI: 10.34031/2071-7318-2021-7-3-25-31. (rus)

18. Yuriev A.G., Zinkova V.A. Nonlinear problems of oblique bending [Nelinejnye zadachi kosogo izgiba]. Bulletin of the BSTU named after V. G. Shukhov. 2023. No 11. Pp. 37–45. DOI: 10.34031/2071-7318-2023-8-11-37-45. (rus)

19. Panchenko L.A., Yuriev A.G. Concrete beams with dispersed and external reinforcement [Betonnye balki s dispersnym i vneshnim armirovaniem]. Electronic Net Polytechnic Journal «Scientific Works of CubSTU». 2024. No 5. Pp. 55–66. DOI:10.26297/2312-9409.2024.5.15. (rus)

20. Ma J., Jan H., Zhang J., Zhang P. Enhancing concrete performance: A comprehensive review of hybrid fiber reinforced concrete. Structures. 2024. Vol. 64. 106560. DOI:10.1016/j. istruc. 2024. 106560.

Information about the authors

Yuriev, Alexandr G. DSc, Professor. E-mail: yuriev_ag@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shuhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostykova, 46.

Panchenko, Larisa A. PhD, Assistant professor. E-mail: panchenko.bstu@mail.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shuhov. Russia, 308012, Belgorod, st. Kostykova, 46.

Received 27.09.2025

Для цитирования:

Юрьев А.Г., Панченко Л.А. Структурный синтез рамы. Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2026. № 4. С. 38–44. DOI: 10.34031/2071-7318-2026-11-4-38-44

For citation:

Yuriev A.G., Panchenko L.A. Structural synthesis of the frame. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2026. No. 4. Pp. 38–44. DOI: 10.34031/2071-7318-2026-11-4-38-44