

DOI: 10.34031/2071-7318-2024-9-7-111-121

*\*Безмен П.А., Емельянова О.В., Яцун С.Ф.**Юго-Западный государственный университет**\*E-mail: pbezmen@yahoo.com*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОЛЕТА ПРИВЯЗНОЙ ПЛАТФОРМЫ

**Аннотация.** Существует проблема оперативного получения достоверной и достаточной информации об окружающей обстановке, в том числе на труднодоступных территориях, где отсутствует связь или требуется длительное время стационарного мониторинга с целью обеспечения безопасности или охраны важных объектов. В статье рассматриваются вопросы математического моделирования автоматизированной тросовой стоянки беспилотного летательного аппарата (платформы) в вертикальной плоскости.

Целью исследования является создание инструментальных средств проектирования привязных летательных платформ, оснащенных автоматизированной тросовой системой удержания с учетом внешних случайных возмущений атмосферы при вертикальном полёте. Для достижения поставленной цели необходимо провести математическое моделирование полета привязных беспилотных летательных платформ с учетом внешних активных и реактивных сил, а также возмущающих сил – случайных воздушных потоков, которые могут быть значительными по силе и переменными по направлению, что, несомненно, влияет на устойчивое положение привязной платформы. Применение алгоритма расширенного фильтра Калмана в качестве наблюдателя состояния привязной летательной платформы при математическом моделировании полета платформы делает возможным учет случайных возмущений атмосферы как частично детерминированной среды с целью уменьшения ошибки положения летательного аппарата при его управлении.

Для решения поставленной задачи использовались методы классической механики, теории устойчивости движения, оптимального управления, теории оценивания, параметрической оптимизации.

Представлены результаты математического моделирования полета привязной летательной платформы – привязного коптера – с учетом случайных атмосферных возмущений. Результаты вычислительных экспериментов позволили установить, что случайные возмущения атмосферы могут оказывать существенное влияние на управление летательным аппаратом по положению.

**Ключевые слова:** привязная платформа, моделирование, фильтр Калмана, наблюдатель состояния.

**Введение.** Стремительное развитие информационных технологий, микропроцессорной техники, систем автоматического управления и связи для беспилотных летательных аппаратов (БЛА) с одной стороны и ограничения или подавление их оптико-электронных компонентов приводит к переосмыслению концепции применения БЛА.

Существует ряд задач по сбору информации и стационарному наблюдению за объектами в труднодоступных местах (леса, горные ущелья, геологические разработки и др.), где прием сигналов затруднен, подавляется или отсутствует вовсе. Ограниченное время работы бортового аккумулятора (в среднем 20–40 мин. для аппаратов среднего класса), и, соответственно, время нахождения летательного аппарата в воздухе требует постоянного присутствия оператора для его обслуживания: подзарядки или замены.

Применение проводного наземного источника питания для летательного аппарата позволит решить задачу длительности нахождения аппарата в воздухе и позволит нести полезную

нагрузку в виде контролирующих приборов, тепловизоров и др., а проводная сеть передачи данных, например, волоконно-оптический кабель, канал которого не подвержен наличию помех, позволит обезопасить передачу сведений независимо от действия РЭБ.

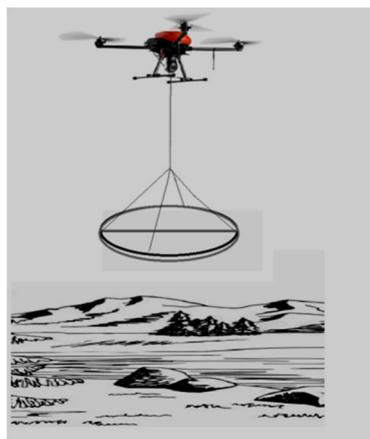
Однако, наличие «привязи» накладывает ограничения на рабочее пространство и динамику в связи с необходимостью удержания летательного аппарата с полезной нагрузкой (до 10–30 кг) на высоте 20–100 м с помощью кабельтроса для электрической нагрузки 10–15кВт [1].

Применение беспилотных коммуникационных платформ с привязанным к ним на кабельтросе оборудованием для нужд аэрогеофизики, например, для гамма-спектрометрии (рис. 1-а), явилось преддверием для развития привязных стационарных телекоммуникационных платформ [2] (рис. 1-б).

Системы привязных летательных платформ NTFPs (англ. *Networked Tethered Flying Platforms* – сетевые привязные летающие платформы), являются частью телекоммуникационных структур и промежуточным звеном между спутниками и

наземной связью. Кабель-трос обеспечивает непрерывную передачу данных и питания, источником которого может служить генератор, электростанция и т.п. С точки зрения беспроводной телекоммуникационной связи использование NTFPs значительно дешевле спутников и башен-вышек. Но существуют и ограничения на приме-

нение рассматриваемых платформ, например, отсутствие мобильности, ограниченная длина кабель-троса, надежность винтомоторной группы используемых беспилотных летательных аппаратов (БЛА). Поэтому сферами применения NTFPs являются сбор и передача информации по экологической, биологической, научно-исследовательской и военной деятельности [3–5].



а)



б)

Рис. 1. Квадрокоптер: а – с исследовательским оборудованием; б – привязной коптер

Вопросами применения привязных платформ начали уделять внимание совсем недавно. Прародителями NTFPs можно считать аэростаты – аппараты легче воздуха, к которым относятся: воздушные шары, стратостаты, дирижабли [6–9]. Так дирижабли, активно строившиеся во второй половине 19 века, имели ёмкости, которые заполнялись газом низкой плотности, например, гелием, и за счет разностей плотностей газа и воздуха могли не только перемещаться в любом направлении, но и долго находиться на определенном месте без затрат горючего, отключив двигатели. Использовались и привязные дирижабли для подъема ретрансляторов, защиты от налетов авиации и пр., которые при подъеме, стоянке на высоте и спуске удерживались специальным тросом, нижний конец которого закреплялся на лебедке. Таким образом, происходила регулировка высоты подъема и/или перемещение в горизонтальной плоскости. Стратостаты и воздушные шары используются и в настоящее время для наблюдений, сбора данных и экспериментов в атмосфере для метеорологии, географических исследований, аэрологии и в коммерческих целях. Продолжительность полета на воздушном шаре может варьироваться в зависимости от различных факторов, таких как погодные условия, выбранная траектория полета, и происходит в нижних слоях атмосферы. В среднем, полет на воздушном шаре длится около часа. В отличие от воздушных шаров полет стратостатов проходит на больших высотах, в стратосфере.

На сегодняшний день недостаточно изучена проблема моделирования привязных беспилотных летательных платформ, которые подвержены влиянию случайных воздушных потоков. Этот фактор является одним из основных, влияющих на устойчивое положение привязной платформы, так как сила ветра может быть значительной по силе и переменной по направлению [10].

Целью работы является создание инструментальных средств проектирования привязных летательных платформ, оснащенных автоматизированной тросовой системой удержания с учетом внешних случайных возмущений атмосферы при вертикальном полёте.

**Методы, оборудование, материалы.** Рассмотрим расчетную схему привязной стационарной платформы, которая состоит из беспилотного летательного аппарата, например, гексакоптера (далее коптер) – 1, кабель-троса – 2, наматываемого на барабан-лебедку – 3 и электрогенератора – 4 (рис. 2). Функциями кабель-троса 2 являются: удержание летательного аппарата в воздухе и его стабилизация, передача электропитания к двигателям, передача данных по оптоволоконкам.

Движение летательного аппарата рассматривается в инерциальной системе отсчета  $OXYZ$ , связанной с землей. Центр масс корпуса коптера  $C$  совпадает с началом подвижной системы координат  $SX_1Y_1Z_1$ . Ориентация летательного аппарата задается самолетными углами крена  $\varphi$ , тангажа  $\theta$  и рысканья  $\psi$  [10–12].

На БЛА (рис. 2) действуют приведенные к центру масс  $C$  силы: тяги несущих винтов  $\bar{F}_i$ , тяжести корпуса и кабель-троса  $\bar{G}$ , сопротивления движению воздуха относительно корпуса (возмущающее воздействие)  $\bar{R}_C$  и натяжения кабель-троса  $\bar{T}$ . Считаем, что кабель-трос находится в натяжении, создаваемом механизмом лебёдки 3.

Проекции силы  $\bar{T}$  на оси инерциальной системы отсчета определим как

$$T_x = T_{XY} \cdot \sin \gamma;$$

$$T_y = T_{XY} \cdot \cos \gamma;$$

$$T_z = \bar{T} \cdot \sin \alpha,$$

где  $T_{XY} = \bar{T} \cdot \cos \alpha$  – проекция силы  $\bar{T}$  на плоскость  $OXY$ .

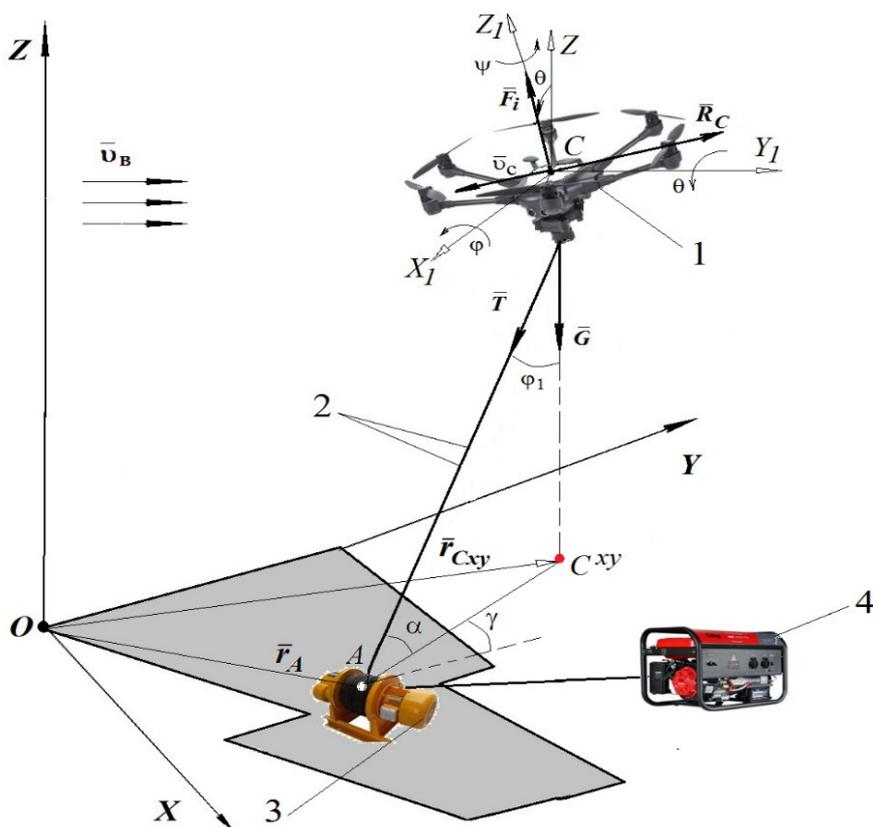


Рис. 2. Расчетная схема привязной стационарной платформы

Проекцией центра масс  $C$  копитера на плоскость  $OXY$  является точка  $C_{XY}$ , положение которой определим геометрически с помощью радиус-векторов, образующих треугольник  $\Delta OAC^{XY}$  (рис. 2):

$$\bar{r}_{C^{XY}} = [X_{C^{XY}} \quad Y_{C^{XY}} \quad 0]^T,$$

$$\bar{r}_A = [X_A \quad Y_A \quad 0]^T;$$

тогда углы  $\alpha$  и  $\gamma$  могут быть найдены исходя из выражений:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{X_A - X_{C^{XY}}}{Y_A - Y_{C^{XY}}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Z_C}{\sqrt{(X_A - X_{C^{XY}})^2 + (Y_A - Y_{C^{XY}})^2}}.$$

Следует учесть, что масса кабель-троса является переменной величиной, зависящей от его длины, поэтому считаем силу тяжести как

$$G = m \cdot g = [m_0 + m_1(Z)] \cdot g,$$

где  $m$  – общая масса копитера и кабель-троса;

$g$  – ускорение свободного падения;

$m_0$  – масса копитера;

$m_1(Z)$  – масса кабель-троса, зависящая от его длины  $Z$ .

Движение копитера можно описать шестью независимыми дифференциальными уравнениями второго порядка. Методика построения уравнений подробно изложена в [10–12]. В общем виде их можно представить в векторно-матричной форме следующим образом:

$$\bar{D}\ddot{q} + \bar{F}(q, \dot{q}) = \bar{M}, \tag{1}$$

где  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} m\mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$  – оператор инерционности

системы,  $\mathbf{E}$  – единичная матрица,  $\mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  – тензор инерции мультикоптера;

$\bar{\mathbf{q}} = [\bar{r}_C \quad \bar{\beta}]^T$  – оператор, задающий пространственное положение аппарата,

$\bar{\beta} = [\varphi \quad \theta \quad \psi]^T$  – угол, определяющий ориентацию аппарата, относительно центра масс  $C$ ;

$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = [\bar{v}_C \quad \bar{\omega}]^T$  – оператор скорости,

$\bar{v}_C = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z}]^T \in \mathfrak{R}^3$  – абсолютная скорость центра масс  $C$  тела в неподвижной системе отсчета,  $\bar{\omega} = [\omega_{x_1} \quad \omega_{y_1} \quad \omega_{z_1}]^T \in \mathfrak{R}^3$  – угловая скорость вращения аппарата в подвижной системе отсчета;

$\bar{F}(q, \dot{q}) = \bar{G}(\bar{q}) + \bar{R}_C(\dot{q})$  – вектор внешних сил;

$\bar{\mathbf{M}} = [\bar{F} \quad \bar{M}]^T$  – вектор управляющих воздействий:  $\bar{F} = T_{10} \cdot \bar{F}_M = T_{10} \cdot [F_{x_1} \quad F_{y_1} \quad F_{z_1}]^T$  – вектор тяговых сил в проекциях на оси неподвижной системы отсчета,

$\bar{M} = [M_{x_1} \quad M_{y_1} \quad M_{z_1}]^T$  – вектор главного момента внешних сил относительно подвижной системы отсчета,  $T_{10}$  – матрица поворота систем координат  $CX_1Y_1Z_1$  относительно  $OXYZ$  [12].

На основании теорем об изменении импульса и кинетического момента системы относительно центра масс аппарата  $C$ , преобразуем уравнение (1) к виду [13–15]:

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_C \\ \dot{\bar{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\omega} \times \bar{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{M} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $L = I \bar{\omega}$  – кинетический момент.

Вектор силы сопротивления движению корпуса коптера в воздушной среде:

$$\begin{aligned} \bar{R}_C^{(0)} &= [R_{CX}^{(0)} \quad R_{CY}^{(0)} \quad R_Z^{(0)}]^T, \\ \bar{R}_C^{(0)} &= -(\mu \bar{v} + \bar{v}^T k \bar{v}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mu, k$  – матрицы эмпирических коэффициентов сопротивления, зависящие от геометрических параметров корпуса коптера, угла атаки несущих винтов;

$\bar{v}$  – относительная скорость центра масс коптера, которая является разностью векторов скоростей центра масс  $\bar{v}_C$  системы координат  $OZ$  и вектора скорости воздушного потока  $\bar{v}_B$ :

$$\bar{v} = \bar{v}_C - \bar{v}_B. \quad (4)$$

Силу  $R_C$  будем рассматривать как случайное возмущающее воздействие на систему в форме «белого» гауссового шума. Случайные величины  $w_1, w_2, w_3$ , действующие соответственно на величины  $Z, \dot{Z}, \ddot{Z}$ , составляют вектор шума  $\mathbf{w}(t)$ :

$$\mathbf{w}(t) = [w_1(t) \quad w_2(t) \quad w_3(t)]^T,$$

характеризующегося ковариационной матрицей вида

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix},$$

где  $Z, \dot{Z}, \ddot{Z}$  – координата, скорость и ускорение центра масс коптера;  $t$  – некоторый момент времени;  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$  – дисперсии случайных величин  $w_1, w_2, w_3$  соответственно.

**Основная часть.** Опишем в дискретном времени  $k$  модель вертикального взлета (посадки) коптера как управляемой системы следующими выражениями [16–18]:

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(k), u(k)) + \mathbf{g} + \mathbf{w}(k), \quad (5)$$

$$y(k) = \mathbf{H}(\mathbf{z}(k)) + v(k), \quad (6)$$

где  $v(k)$  – величина шума измерения, характеризуется дисперсией  $R$ ;

$k$  – некоторый текущий момент времени;

$(k+1)$  – следующий за текущим момент времени;

$\mathbf{z}(k)$  – вектор состояния управляемой системы, переменные состояния которого –  $z_1(k), z_2(k), z_3(k)$ , имеют вид

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(k) \\ \dot{Z}(k) \\ \ddot{Z}(k) \end{bmatrix};$$

$u(k)$  – управляющее воздействие;

$y(k)$  – величина выхода системы;

$\mathbf{F}(\bullet)$  – вектор-функция процесса изменения состояния размерностью 3;

$\mathbf{H}(\bullet)$  – вектор-функция процесса наблюдений размерностью 3;

$\mathbf{g}$  – вектор постоянных возмущающих воздействий размерностью 3;

$\mathbf{w}(k)$  – вектор шума процесса, размерность вектора 3 – характеризуется ковариационной матрицей  $\mathbf{Q}$ .

Определим функцию, задающую общую подъемную силу коптера:

$$F_M(Z(k), Z^*(k), F_{LOAD}(k), F_{MAX}, \Delta t, N, P, I, D) = \begin{cases} Z_E(k) := Z^*(k) - Z(k) \\ Z_I(k) := Z_I(k-1) + Z_E(k) \cdot \Delta t \\ F := (P \cdot Z_E(k)) + (I \cdot Z_I(k)) + (D \cdot ((Z_E(k) - Z_E(k-1)) / \Delta t)) + F_{LOAD}(k) \\ F \text{ если } 0 < F < N \cdot F_{MAX} \text{ иначе} \\ 0 \text{ если } F \leq 0 \\ \text{иначе } N \cdot F_{MAX} \end{cases}$$

где  $F_M$  – общая подъемная сила коптера;  
 $Z(k)$  – текущая высота полета коптера;  
 $Z^*(k)$  – требуемая высота полета коптера;  
 $F_{LOAD}(k)$  – сила нагрузки (сила тяжести коптера и кабель-троса плюс сила натяжения  $\bar{T}$  кабель-троса);

$F_{MAX}$  – максимальная подъемная сила одного привода (винтомоторной группы) коптера;

$\Delta t$  – период времени (сек.) между моментом времени  $(k-1)$  и моментом времени  $k$ ;

$N$  – количество приводов (винтомоторных групп) коптера;

$P, I, D$  – коэффициенты ПИД-регулятора:  $P$  – коэффициент пропорциональной составляющей,  $I$  – коэффициент интегральной составляющей,  $D$  – коэффициент дифференциальной составляющей;

$Z_E(k)$  – текущая ошибка вертикальной координаты коптера;

$Z_E(k-1)$  – предыдущая ошибка вертикальной координаты коптера;

$Z_I(k)$  – текущая ошибка интегральной составляющей;

$Z_I(k-1)$  – предыдущая ошибка интегральной составляющей;

$F(k)$  – вычисленная текущая общая подъемная сила приводов коптера,  $0 < F \leq N \cdot F_{MAX}$ .

Зададим функцию, определяющую массу кабель-троса зависимой от высоты  $Z(k)$  полета коптера:

$$m_1(Z(k)) = k_m \cdot Z(k),$$

где  $k_m$  – коэффициент, задающий массу 1 метра кабель-троса (зависит от плотностей компонентов кабель-троса и его сечения);

$Z(k)$  – высота полета коптера в некоторый момент времени  $k$ .

Исходя из уравнения динамики вертикального полета коптера:

$$[m_0 + m_1(Z(k))] \cdot \ddot{Z}(k) = -[m_0 + m_1(Z(k))] \cdot g - [\mu \cdot \dot{Z}(k)] - T_C - R_C + F_M(\bullet),$$

$$\ddot{Z}(k) = -g - \frac{[\mu \cdot \dot{Z}(k)]}{[m_0 + m_1(Z(k))]} - \frac{T_C}{[m_0 + m_1(Z(k))]} - \frac{R_C}{[m_0 + m_1(Z(k))]} + \frac{F_M(\bullet)}{[m_0 + m_1(Z(k))]},$$

где  $Z(k), \dot{Z}(k), \ddot{Z}(k)$  – высота полета, скорость и ускорение коптера как материальной точки;

$m_1(\bullet)$  – функция, определяющая массу кабель-троса;

$\mu$  – коэффициент вязкости среды (вязкого сопротивления);

$T_C$  – проекция силы натяжения кабель-троса на ось  $Z$ ;

$R_C$  – проекция силы сопротивления движению корпуса коптера в воздушной среде на ось  $Z$ ;

$F_M(\bullet)$  – функция, задающая подъемную силу коптера;

$Z^*(\bullet)$  – функция, задающая требуемую высоту полета коптера.

Выразим вектор-функцию процесса изменения состояния  $F(\bullet)$  системы коптера:

$$F(z(k), u(k)) = \begin{bmatrix} F_1(z(k)) \\ F_2(z(k)) \\ F_3(z(k), u(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(k-1) + \dot{Z}(k) \cdot \Delta t + \ddot{Z}(k) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \\ \dot{Z}(k-1) + \ddot{Z}(k) \cdot \Delta t \\ -\left(\frac{\mu \cdot \dot{Z}(k)}{m_0 + k_m \cdot Z(k)}\right) - \left(\frac{T_C}{m_0 + k_m \cdot Z(k)}\right) + \left(\frac{u(k)}{m_0 + k_m \cdot Z(k)}\right) \end{bmatrix},$$

где  $u(k) = F_M(\bullet)$ ;

$\Delta t$  – период времени между моментом времени  $(k-1)$  и моментом времени  $k$ .

Определим вектор-функцию  $H(\bullet)$  процесса наблюдений:

$$H(z(k)) = [H_1(z(k)) \quad H_2(z(k)) \quad H_3(z(k))] = [Z(k) \quad 0 \quad 0],$$

таким образом, единственной наблюдаемой величиной системы является высота  $Z(k)$  полета коптера.

Проведем линеаризацию вектор-функций  $F(\bullet)$  и  $H(\bullet)$  – получим матрицу Якоби  $J_{F_x}(k)$  и векторы  $J_{F_u}(k)$  и  $J_{H_x}(k)$ :

$$J_{F_x} = \frac{\partial F(\bullet)}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial z_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_3(\bullet)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_3(\bullet)}{\partial z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & & 1 & \Delta t \\ k_m \cdot \frac{\mu \cdot \dot{Z}(k) + T_C - u(k)}{(m_0 + k_m \cdot Z(k))^2} & & -\mu & 0 \end{bmatrix},$$

при условии, что:  $Z(0) = 0, \dot{Z}(0) = 0, u(0) = 0, m_0 \gg m_1(k)$  имеем:

$$J_{F_x} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ k_m \cdot \frac{T_C}{m_0^2} & -\frac{\mu}{m_0} & 0 \end{bmatrix}; J_{F_u} = \frac{\partial F(\bullet)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_3(\bullet)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_0 + k_m \cdot Z(k)} \end{bmatrix},$$

при условии, что  $Z(0) = 0$  имеем:

$$J_{F_u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_0} \end{bmatrix}^T; J_{H_x} = \frac{\partial H(\bullet)}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1(\bullet)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial H_3(\bullet)}{\partial z_3} \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0].$$

Вектор постоянных возмущающих воздействий имеет вид:  $g = [0 \ 0 \ -g]^T$ .

Используя полученные матрицу  $J_{F_x}(k)$  и векторы  $J_{F_u}(k)$  и  $J_{H_x}(k)$ , перепишем выражения (5) и (6):

$$z(k+1) = J_{F_x} \cdot z(k) + J_{F_u} \cdot u(k) + g + w, \quad (7)$$

$$y(k) = J_{H_x} \cdot z(k) + v. \quad (8)$$

С целью математического моделирования вертикального полета коптера с кабелем-тросом в качестве наблюдателя состояния был использован алгоритм расширенного фильтра Калмана (РФК, англ. *extended Kalman filter – EKF*), который в настоящее время широко используется в робототехнике [19-21].

Для проведения численного эксперимента определим функцию, задающую требуемую высоту полета коптера:

$$Z^*(k, k_0, k_1, k_2, k_3, s, p, d) = \begin{cases} s & \text{если } k \leq k_0 \\ \left(\frac{p-s}{k_1-k_0}\right) \cdot k + \left(\frac{k_1 \cdot s - k_0 \cdot p}{k_1-k_0}\right) & \text{если } (k_0 < k) \wedge (k \leq k_1) \\ p & \text{если } (k_1 < k) \wedge (k \leq k_2) \\ \left(\frac{d-p}{k_3-k_2}\right) \cdot k + \left(\frac{k_3 \cdot p - k_2 \cdot d}{k_3-k_2}\right) & \text{если } (k_2 < k) \wedge (k \leq k_3) \\ d & \text{если } k_3 < k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases},$$

где  $k_0, k_1, k_2, k_3$  – моменты времени,  $k_0 < k_1 < k_2 < k_3$ ;

$s$  – начальное постоянное значение функции при  $k \leq k_0$ ;

$p$  – установившееся постоянное значение функции при  $k_1 < k \leq k_2$ ;

$d$  – конечное постоянное значение функции при  $k_3 < k$ .

В ходе математического моделирования вертикального полета коптера принимались следующие значения описанных параметров:

$\Delta t = 10^{-3}$  сек,  $m_0 = 6$  кг,  $\mu = 10$ ,  $T_C = 10$  Н,  $k_m = 0,06$  кг,  $F_{MAX} = 15$  Н,  $N = 6$ ,  $P = 200$ ,  $I = 10$ ,

$D = 10$ ,  $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$ ; начальные условия

моделирования (при  $k = 0$ ):  $Z(0) = 0$  м,  $\dot{Z}(0) = 0$  м/с,  $\ddot{Z}(0) = 0$  м/с<sup>2</sup>.

Вычислительные эксперименты выполнялись с использованием ПО MathWorks MATLAB.

**Результаты.** На рисунках 3–4 представлены результаты математического моделирования полета коптера при значениях аргументов функции  $Z^*$ :

$s = 0$  м,  $p = 20$  м,  $d = 0$  м,  $k_0 = 0$  сек,  $k_1 = 60$  сек,  $k_2 = 180$  сек,  $k_3 = 240$  сек,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}, \text{ т.е. предполагается, что}$$

на величину  $Z$  оказывает влияние случайная сила  $R_C$  – «белый» гауссовый шум с нулевым математическим ожиданием и диапазоном случайных величин  $-3 \dots 3$  (так как элемент матрицы  $Q_{1,1} = 1$ ). На рисунках 3-а, 3-б, 3-в приведены результаты моделирования при  $R = 0,1$ , на рисунках 4-а, 4-б, 4-в – при  $R = 10$ .

Рисунки 3-а, 3-б, 3-в демонстрируют значительное отклонение координаты  $Z$  коптера от требуемых значений координаты  $Z^*$  при наборе коптером высоты. На рисунках 4-а, 4-в, напротив, показана минимальная ошибка  $Z_E$  вертикальной координаты коптера вследствие значения дисперсии  $R$ , характеризующей величину шума измерения, большего значения элемента матрицы  $Q_{1,1}$ , характеризующего величину шума процесса для величины  $Z$ , то есть  $R > Q_{1,1}$ . Наблюдатель состояния с данным соотношением дисперсий может быть применен при использовании в системе управления коптером датчика высоты с относительно высокой погрешностью. С другой стороны, при  $R \gg Q$ , происходит чрезмерное «сглаживание» оценок значений переменных состояния системы, и, как следствие этого, их искажение.

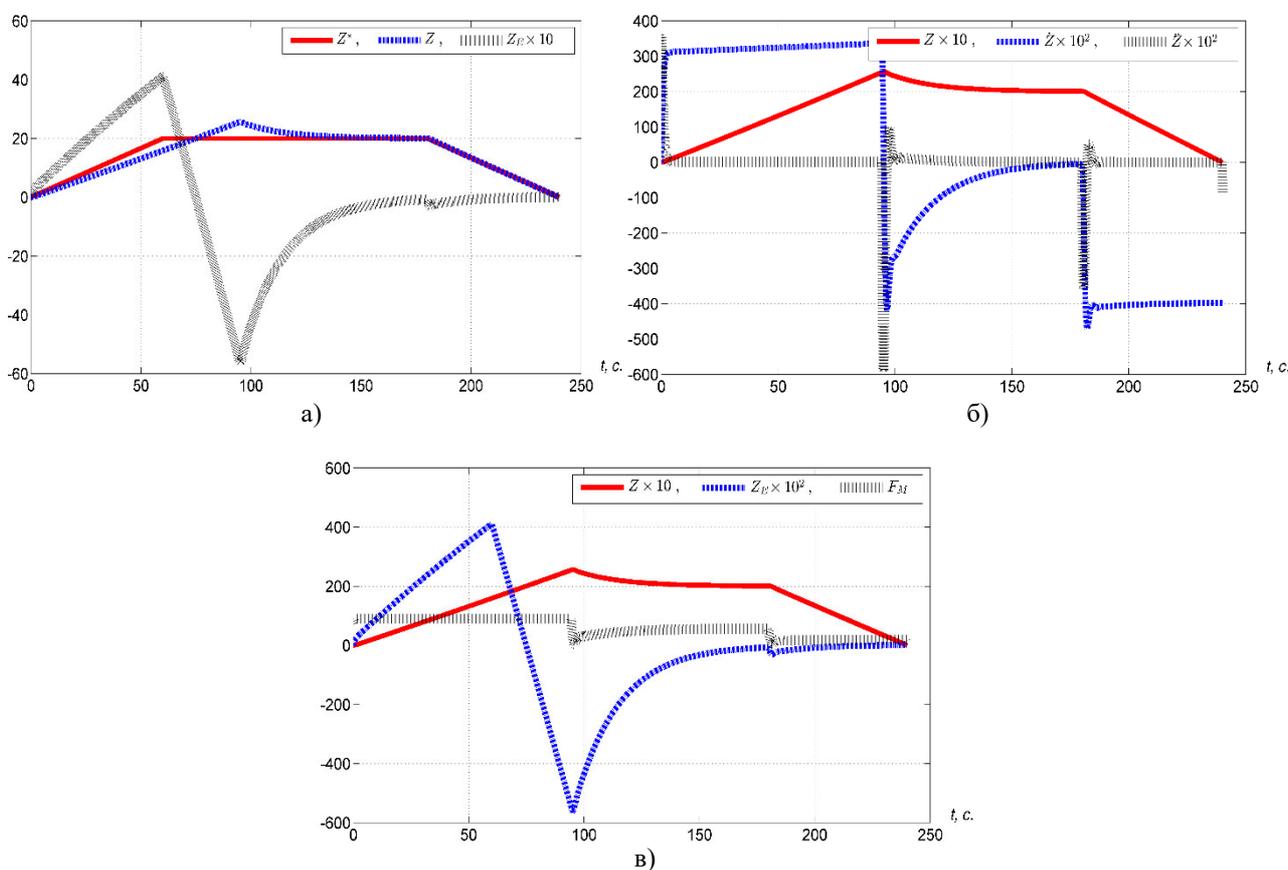


Рис. 3. Временные диаграммы изменения значений: а –  $Z^*$ ,  $Z$ ,  $Z_E$ , б –  $Z$ ,  $\dot{Z}$ ,  $\ddot{Z}$ , в –  $Z$ ,  $Z_E$ ,  $F_M$

Проведено исследование влияния максимальной подъемной силы  $F_{MAX}$  одного привода на диапазон изменения подъемной силы  $F_M$  коптера – результаты представлены на рис. 5.

Рисунок 5 демонстрирует временные диаграммы изменения подъемной силы  $F_M$  коптера при разных значениях максимальной подъемной силы одного привода  $F_{MAX}$  и при значениях аргументов функции  $Z^*$ :  $s = 0$  м,  $p = 1$  м,  $d = 0$  м,  $k_0$

$= 0$  сек,  $k_1 = 3$  сек,  $k_2 = 9$  сек,  $k_3 = 12$  сек, на величину  $Z$  сила  $R_C$  не оказывала влияние. Временные диаграммы 1 и 2 (рис. 5) дают информацию о недостаточной тяговооруженности для вертикального полета коптера; с другой стороны, временные диаграммы 3 и 4 позволяют говорить о достаточных возможностях приводов для взлета.

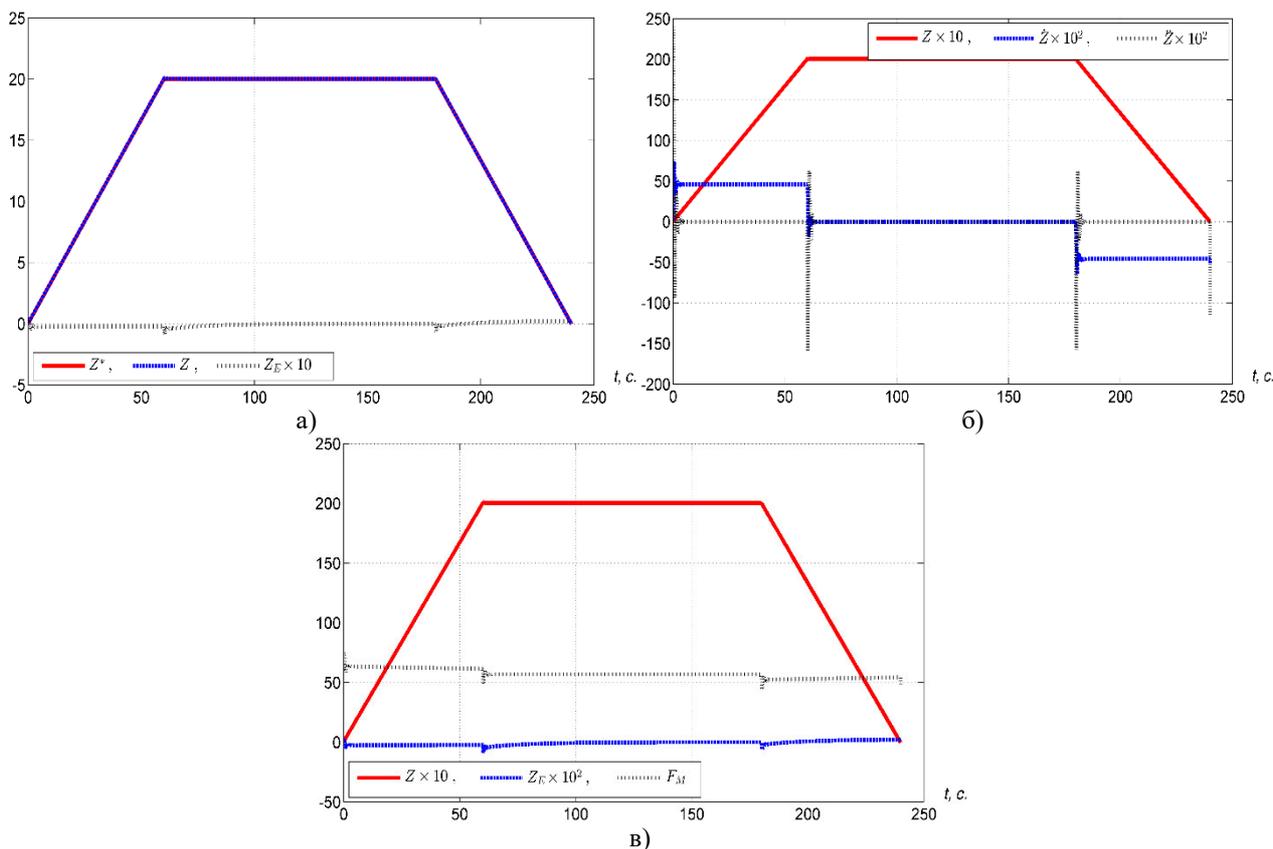


Рис. 4. Временные диаграммы изменения значений: а –  $Z^*$ ,  $Z$ ,  $Z_E$ , б –  $Z$ ,  $\dot{Z}$ ,  $\ddot{Z}$ , в –  $Z$ ,  $Z_E$ ,  $F_M$

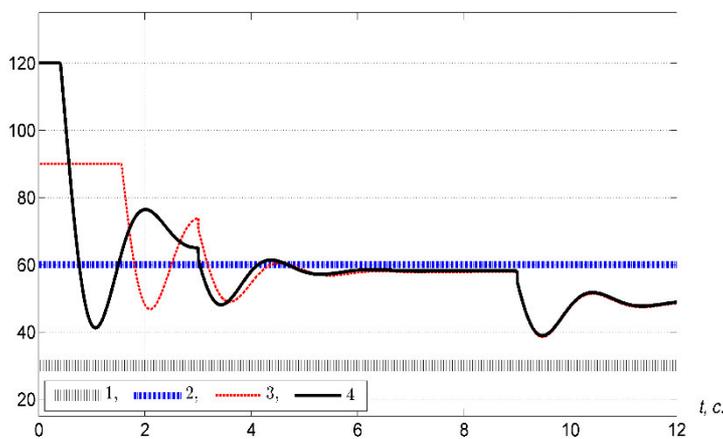


Рис. 5. Временные диаграммы изменения подъемной силы  $F_M$  копитера при значениях  $F_{max}$ :  
 1 –  $F_{max} = 5$  Н, 2 –  $F_{max} = 10$  Н, 3 –  $F_{max} = 15$  Н, 4 –  $F_{max} = 20$  Н

**Выводы.** Предложена математическая модель привязной летательной платформы (NTFP), описывающая процесс взлета/посадки копитера с учетом влияния случайных возмущений атмосферы на высоту полета копитера.

Математическая модель полета привязной платформы, описанная в пространстве состояний, может быть использована для построения наблюдателей состояния подобных устройств на основе расширенного фильтра Калмана. Фильтр Калмана, используемый при математическом моделировании полета привязной платформы, позволяет получить оценку переменных состояния

данного летательного аппарата и учитывать случайные возмущения атмосферы как частично детерминированной среды с целью уменьшения ошибки позиционирования привязной платформы во время управления ею.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вишневецкий В.М., Козырев Д.В., Рыков В.В., Нгуен З.Ф. Моделирование надёжности беспилотного высотного модуля привязной телекоммуникационной платформы // Информационные технологии и вычислительные системы.

2020. № 4. С. 26–38. DOI: 10.14357/20718632200403

2. Паршин А.В., Цирель В.С., Ржевская А.К. Методические рекомендации по выполнению маловысотной аэромагнитной съемки с применением БПЛА // Проблемы геокосмоса. 2018. С. 190–195.

3. Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. Unleashing the potential of networked tethered flying platforms: Prospects, challenges, and applications // IEEE Open Journal of Vehicular Technology. 2022. Vol. 3. Pp. 278–320. DOI: 10.1109/OJVT.2022.3177946

4. Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. On the Usage of Networked Tethered Flying Platforms for Massive Events-Case Study: Hajj Pilgrimage // arXiv preprint arXiv:2111.00900. 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2111.00900

5. Lou Z., Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. HAPS in the non-terrestrial network nexus: Prospective architectures and performance insights // IEEE Wireless Communications. 2023. Vol. 6(30). Pp. 52–58. DOI: 10.1109/MWC.004.2300198

6. Kanoria A.A., Pant R.S. Winged aerostat systems for better station keeping for aerial surveillance // International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (CMAE 2011). Advanced Materials Research. 2011. Vol. 433–440. Pp. 6871–6879. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.433-440.6871

7. Khoury G.A., Gillett J.D. Airship Technology. Cambridge Aerospace Series, 2004. 560 p.

8. Rajani A., Pant R.S., Sudhakar K. Dynamic Stability Analysis of a Tethered Aerostat // AIAA Journal of Aircraft. 2010. Vol. 47(5). Pp. 1531–1538. DOI: 10.2514/1.47010

9. Lambert C., Nahon M. Stability Analysis of a Tethered Aerostat // Journal of Aircraft. 2003. Vol. 40(4). Pp. 705–715. DOI: 10.2514/2.3149

10. Vishnevsky V.M., Mikhailov E.A., Tumchenok D.A. et al. Mathematical Model of the Operation of a Tethered Unmanned Platform under Wind Loading // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. Vol. 12. Pp. 492–502. DOI: 10.1134/S2070048220040201

11. Kiribayashi S., Ashizawa J., Nagatani K. Modeling and design of tether powered multicopter // Proceedings of the 2015 IEEE International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics, 2015. Pp. 1–7. DOI: 10.1109/SSRR.2015.7443016

12. Kwon H-M, Lee D-K. Modeling and Simulation of Heavy-Lift Tethered Multicopter Considering Mechanical Properties of Electric Power Cable // Aerospace. 2021. Vol. 8(8). 208. Pp. 1–18. DOI: 10.3390/aerospace8080208

13. Павловский М.А., Акинфеева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика: Динамика // Киев: Вища школа. 1990. 480 с.

14. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка. 1982. 632 с.

15. Jatsun S., Emelyanova O., Lushnikov B., Leon A.M., Morocho L.M., Pechurin A., Sarmiento C.N. Hovering control algorithm validation for a mobile platform using an experimental test bench // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1027. 012008. DOI: 10.1088/1757-899X/1027/1/012008

16. Zaid A.A., Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. Aerial-Aided mmWave VANETs Using NOMA: Performance Analysis, Comparison, and Insights // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2024. Vol. 73 (4). Pp. 4742–4758. DOI: 10.1109/TVT.2023.3330306

17. Dinh T.D., Vishnevsky V., Larionov A., Vybornova A., Kirichek R. Structures and deployments of a flying network using tethered multicopters for emergencies // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science/ 2020. Vol. 12563. DOI: 10.1007/978-3-030-66471-8\_3

18. Alpagó D., Dörfler F., Lygeros J. An extended Kalman filter for data-enabled predictive control // IEEE Control Systems Letters. 2020. Vol. 4 Pp. 994–999. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.2998296

19. Sun H., Madonski R., Li S., Zhang Y., Xue W. Composite control design for systems with uncertainties and noise using combined extended state observer and Kalman filter // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2021. Vol. 69(4). Pp. 4119–4128. DOI: 10.1109/TIE.2021.3075838.

20. Schmidt S.F. Application of state-space methods to navigation problems // Advances in Control Systems, 1966. Vol. 3. Pp. 293–340. DOI: 10.1016/B978-1-4831-6716-9.50011-4

21. Безмен П.А. Комплексирование данных системы управления мобильным роботом с использованием расширенного фильтра Калмана // Известия Юго-Западного государственного университета, 2019. №2. С. 53–64. DOI: 10.21869/2223-1560-2019-23-2-53-64

#### Информация об авторах

**Безмен Петр Анатольевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Механика, мехатроника и робототехника». E-mail: pbezmen@yahoo.com. Юго-Западный государственный университет. Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94.

**Емельянова Оксана Викторовна**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Механика, мехатроника и робототехника». E-mail: oks-emelyanova@yandex.ru. Юго-Западный государственный университет. Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94.

**Яцун Сергей Федорович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика, мехатроника и робототехника». E-mail: teormeh@inbox.ru. Юго-Западный государственный университет. Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94.

Поступила 02.05.2024 г.

© Безмен П.А., Емельянова О.В., Яцун С.Ф., 2024

**\*Bezmen P.A., Emelyanova O.V., Jatsun S.F.**

Southwest State University

\*E-mail: pbezmen@yahoo.com

## MATHEMATICAL MODELING OF A TETHERED PLATFORM'S CONTROLLED VERTICAL FLIGHT

**Abstract.** *There is a problem of quickly obtaining reliable and sufficient information about the environment, including in hard-to-reach areas where there is no communication or long-term stationary monitoring is required in order to ensure the safety or security of important objects. The paper discusses the issues of mathematical modeling of automated cable parking of an unmanned aerial vehicle (platform) in a vertical plane.*

*The aim of the research is to create tools for the design of tethered flying platforms equipped with an automated cable restraint system, taking into account external random atmospheric disturbances during vertical flight. To achieve this aim, it is necessary to carry out mathematical modeling of the flight of tethered unmanned aerial platforms, taking into account external active and reactive forces, as well as disturbing forces – random air flows, which can be significant in strength and variable in direction, which undoubtedly affects the stable position tethered platform. The use of the extended Kalman filter algorithm as an observer of the tethered flying platform state in mathematical modeling of the platform's flight makes it possible to take into account random disturbances of the atmosphere as a partially deterministic environment in order to reduce the position error of the aircraft during its control.*

*To solve the problem, methods of classical mechanics, motion stability theory, optimal control, estimation theory, and parametric optimization were used.*

*The results of mathematical modeling of a tethered flying platform – a tethered copter – flight are presented, taking into account random atmospheric disturbances. The results of computational experiments made it possible to establish that random atmospheric disturbances can have a significant impact on the position control of an aircraft.*

**Keywords:** *tethered platform, modeling, Kalman filter, state observer.*

### REFERENCES

1. Vishnevsky V.M., Kozyrev D.V., Rykov V.V., Nguyen Z.F. Modeling the reliability of an unmanned high-altitude module of a tethered telecommunications platform [Modelirovaniye nadozhnosti bespilnogo vysotnogo modulya privyaznoy telekommunikatsionnoy platformy]. Information technologies and computing systems. 2020. No. 4. Pp. 26–38. DOI: 10.14357/20718632200403 (rus)
2. Parshin A.V., Tsirel V.S., Rzhetskaya A.K., Methodological recommendations for performing low-altitude aeromagnetic surveys using UAVs [Metodicheskiye rekomendatsii po vypolneniyu malovysotnoy aeromagnitnoy s"yemki s primeneni- yem BPLA]. Problems of geocosmos, 2018. Pp. 190–195. (rus)
3. Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. Unleashing the potential of networked tethered flying platforms: Prospects, challenges, and applications. IEEE Open Journal of Vehicular Technology. 2022. Vol. 3. Pp. 278–320. DOI: 10.1109/OJVT.2022.3177946
4. Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. On the Usage of Networked Tethered Flying Platforms for Massive Events-Case Study: Hajj Pilgrimage. arXiv preprint arXiv:2111.00900. 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2111.00900
5. Lou Z., Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. HAPS in the non-terrestrial network nexus: Prospective architectures and performance insights. IEEE Wireless Communications. 2023. Vol. 6(30). Pp. 52–58. DOI: 10.1109/MWC.004.2300198
6. Kanoria A.A., Pant R.S. Winged aerostat systems for better station keeping for aerial surveillance. International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (CMAE 2011). Advanced Materials Research. 2011. Vol. 433–440. Pp. 6871–6879. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.433-440.6871
7. Houry G.A., Gillett J.D. Airship Technology. Cambridge Aerospace Series, 2004. 560 p.
8. Rajani A., Pant R.S., Sudhakar K. Dynamic Stability Analysis of a Tethered Aerostat. AIAA

Journal of Aircraft. 2010. Vol. 47(5). Pp. 1531–1538. DOI: 10.2514/1.47010.

9. Lambert C., Nahon M. Stability Analysis of a Tethered Aerostat. Journal of Aircraft. 2003. Vol. 40(4). Pp. 705–715. DOI: 10.2514/2.3149

10. Vishnevsky V.M., Mikhailov E.A., Tumchenok D.A. et al. Mathematical Model of the Operation of a Tethered Unmanned Platform under Wind Loading. Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. Vol. 12. Pp. 492–502. DOI: 10.1134/S2070048220040201

11. Kiribayashi S., Ashizawa J., Nagatani K. Modeling and design of tether powered multicopter. Proceedings of the 2015 IEEE International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics, 2015. Pp. 1–7. DOI: 10.1109/SSRR.2015.7443016.

12. Kwon H-M, Lee D-K. Modeling and Simulation of Heavy-Lift Tethered Multicopter Considering Mechanical Properties of Electric Power Cable. Aerospace. 2021. Vol. 8(8). 208. Pp. 1–18. DOI: 10.3390/aerospace8080208

13. Pavlovsky M.A., Akinfieva L.Yu., Boychuk O.F. Theoretical mechanics: Dynamics [Teoreticheskaya mekhanika: Dinamika]. Kiev: Vyshcha shkola, 1990, 480 p. (rus)

14. Lyapunov A.M., Lectures on theoretical mechanics [Lektzii po teoreticheskoy mekhanike]. Kiev: Naukova dumka, 1982. p. 632. (rus)

15. Jatsun S., Emelyanova O., Lushnikov B., Leon A.M., Morocho L.M., Pechurin A., Sarmiento C.N. Hovering control algorithm validation for a mobile platform using an experimental test bench. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1027. 012008. DOI: 10.1088/1757-899X/1027/1/012008

16. Zaid A.A., Belmekki B.E.Y., Alouini M.S. Aerial-Aided mmWave VANETs Using NOMA: Performance Analysis, Comparison, and Insights. IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2024. Vol. 73 (4). Pp. 4742–4758. DOI: 10.1109/TVT.2023.3330306

17. Dinh T.D., Vishnevsky V., Larionov A., Vybornova A., Kirichek R. Structures and deployments of a flying network using tethered multicopters for emergencies. Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science. 2020. Vol. 12563. DOI: 10.1007/978-3-030-66471-8\_3

18. Alpagó D., Dörfler F., Lygeros J. An extended Kalman filter for data-enabled predictive control. IEEE Control Systems Letters/ 2020. Vol. 4. Pp. 994–999. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.2998296.

19. Sun H., Madonski R., Li S., Zhang Y., Xue W. Composite control design for systems with uncertainties and noise using combined extended state observer and Kalman filter. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2021. Vol. 69(4). Pp. 4119–4128. DOI: 10.1109/TIE.2021.3075838

20. Schmidt S.F. Application of state-space methods to navigation problems. Advances in Control Systems, 1966. Vol. 3. Pp. 293–340. DOI: 10.1016/B978-1-4831-6716-9.50011-4

21. Bezmen P.A. Integration of Mobile Robot Control System Data Using the Extended Kalman Filter [Kompleksirovaniye dannykh sistemy upravleniya mobil'nym robotom s ispol'zovaniyem rasshirennogo fil'tra Kalmana]. Proceedings of the Southwest State University, 2019. No. 2. Pp. 53–64. DOI: 10.21869/2223-1560-2019-23-2-53-64 (rus)

#### *Information about the authors*

**Bezmen, Petr A.** PhD, Assistant professor. E-mail: pbezmen@yahoo.com. Southwest State University. Russia, 305040, Kursk, st. 50 let Oktyabrya, 94.

**Emelyanova, Oksana V.** PhD, Assistant professor. E-mail: oks-emelyanova@yandex.ru. Southwest State University. Russia, 305040, Kursk, st. 50 let Oktyabrya, 94.

**Jatsun, Sergey F.** DSc, Professor. E-mail: teormeh@inbox.ru. Southwest State University. Russia, 305040, Kursk, st. 50 let Oktyabrya, 94.

*Received 02.05.2024*

#### **Для цитирования:**

Безмен П.А., Емельянова О.В., Яцун С.Ф. Математическое моделирование управляемого вертикального полета привязной платформы // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2024. №7. С. 111–121. DOI: 10.34031/2071-7318-2024-9-7-111-121

#### **For citation:**

Bezmen P.A., Emelyanova O.V., Jatsun S.F. Mathematical modeling of a tethered platform's controlled vertical flight. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2024. No. 7. Pp. 111–121. DOI: 10.34031/2071-7318-2024-9-7-111-121