

DOI: 10.34031/2071-7318-2022-7-7-31-43

1.**Радайкин О.В.*, ^{1,2}*Сабитов Л.С.*, ³*Клюев С.В.*, ⁴*Хассун М.С.*, ⁵*Аракчеев Т.П.*, ¹*Дарвиш А.*¹Казанский государственный энергетический университет²Казанский (Приволжский) федеральный университет³Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова⁴Казанский государственный архитектурно-строительный университет⁵ООО «ГК «ЭПЦ-Гарант», Республика Татарстан

*E-mail: olegxxii@mail.ru

СХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННОГО ДИАГРАММНОГО МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация. Ранее мы достаточно подробно рассмотрели малоизученный в теории диаграммного метода расчёта железобетонных стержневых элементов вопрос о точности (погрешности). Тесно с ним связано понятие сходимости численной реализации рассматриваемого метода, которое до сих пор оставалось нераскрытым. В статье представлено теоретическое обоснование критерия сходимости численного диаграммного метода расчёта прочности железобетонных изгибаемых элементов. Полученный критерий по форме совпадает с Чебышевой нормой. Из него вытекают критерий останова итерационного процесса вычислений и оценка погрешности численного диаграммного метода. На примере железобетонного элемента с прямоугольным сечением и двойным армированием исследован вопрос сходимости итерационного расчёта прочности при варьировании класса бетона и процента армирования. Установлено, что для всех рассмотренных вариантов конструирования итерационный процесс вычислений сходится после 6-й итерации при начальном приближении кривизны $\chi_0 = 0$ и после 4-й итерации – при $\chi_0 = 10^{-5}$, при этом относительная погрешность расчёта составляет $\delta < 1$ %. Установлено также, что с увеличением процента армирования сходимость расчёта улучшается: при количестве итераций равном 4 погрешность при варианте конструирования В60, $\mu = 0,5$ % составляет 10,3 %, а при В35, $\mu = 3,0$ % – 0,98 %.

Ключевые слова: армированный бетон, нелинейная деформационная модель, диаграммный метод, численный метод, сходимость.

Введение. Ранее мы достаточно подробно рассмотрели малоизученный в численной реализации диаграммного метода расчёта железобетонных стержневых элементов вопрос о его точности (погрешности) [1]. Тесно с этим вопросом связано такое понятие, как сходимость. К сожалению, не нашлось ни одной работы как в отечественной литературе, так и зарубежной, посвящённой теории сходимости рассматриваемого метода. Цель данной публикация – в определённой мере восполнить этот пробел.

Сходимость определяют как приближение (стремление) результата численного метода к истинному (аналитическому) решению задачи. Процесс последовательных приближений считается законченным, если его результаты соответствуют некоторому критерию сходимости.

В статье [2] отмечается, что установить сходимость и оценить быстроту сходимости итерационного процесса не представляется возможным из-за немонотонности итерационного расчёта диаграммным методом. Скорость сходимости итераций зависит от уровня нагружения. На начальных этапах итерационный процесс в пределах шага нагружения сходится в среднем за 10-

15 итераций, по мере приближения к предельному состоянию скорость сходимости замедляется. На точность результата большое влияние оказывает формулировка условия прекращения итерационного процесса указанием величины минимального изменения итерационно уточняемых переменных и предельного числа итераций.

В монографии [3] расчёт статически неопределимых железобетонных конструкций с учётом физической нелинейности предложено вести методом последовательного уточнения жесткостей. Отмечается, что начальное приближение решения не влияет на сходимость итерационного метода, поэтому для формулирования критерия сходимости рекуррентная зависимость для нахождения искомого параметра (усилия в сечении стержня с учётом перераспределения) принята в виде простейшей цепной дроби вида

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

для сходимости цепной дроби необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ был расходящимся.

Сформулировать условие сходимости процесса

последовательного уточнения жесткостей удаётся лишь при рассмотрении простейших систем. Попытки сформулировать это условие для более сложных систем привели к усложнению и критериев сходимости, и аппарата, необходимого для их анализа [4].

В МКЭ, например, в [5] для итерационного уточнения на каждом шаге нагружения напряжениями используется метод переменных параметров упругости (модифицированный алгоритм Ньютона-Рафсона, в котором касательные мо-

дули заменяются на секущие). В качестве критерия сходимости применяется евклидова норма вектора деформаций.

В Методическом пособии [6] нелинейные задачи железобетона решаются в самом общем виде в объёмной постановке методами упругих решений, переменных параметров, начальных напряжений и др. Интерес касает темы статьи представляет небольшой параграф этого пособия 11.7, в котором приведены общие соображения о критерии сходимости метода упругих решений. Критерий записывается через перемещения в трёх возможных вариантах:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\Delta r_i}{r_{\text{эт}}} \right| \leq \varepsilon - \text{октаэдрическая норма,} \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta r_i}{r_{\text{эт}}} \right)^2 \right]} \leq \varepsilon - \text{Евклидова норма,} \\ \|x\|_3 &= \max \left| \frac{\Delta r_i}{r_{\text{эт}}} \right| \leq \varepsilon - \text{Чебышева норма,} \end{aligned} \quad (1)$$

где $\|x\|_{1,2,3}$ – норма невязки; ε – константа ($10^{-2} \leq \varepsilon \leq 10^{-6}$); $1 \leq i \leq N$ – номер компоненты решения; Δr_i – разность компонент вычисления перемещений между текущей и предыдущей итерациями;

$r_{\text{эт}} = \begin{cases} \max |r_i| \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_i| \end{cases}$ – эталонная величина перемещений.

Если процесс сходится по одной норме, то он сходится и по любой другой норме. Выбор нормы определяет скорость сходимости. При прочих равных условиях наибольшую скорость сходимости дает Евклидова норма, наименьшую – Чебышева норма.

Использовать вышеприведённые критерии для численного диаграммного метода также возможно, если вместо перемещений r_i использовать напряжения σ_i , деформации ε_i , предельный момент M_{ult} , момент трещинообразования $M_{cr,c}$, жёсткость D и др. Но более удобно, на наш взгляд, для железобетонных элементов, испытывающих изгиб (продольный либо поперечный), критерий сходимости строить через кривизну χ . Поскольку кривизна – это интегральный параметр, описывающий деформированное состояние сечения в целом, то на её основе может быть получен критерий сходимости по Чебышеву:

$$\|x\|_3 = \left| \frac{\Delta \chi}{\chi} \right| = \left| \frac{\chi_k - \chi_{k-1}}{\chi_k} \right| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

где χ_k, χ_{k-1} – кривизна оси стержня в расчётном сечении соответственно на текущей и предшествующей итерациях расчёта.

Ниже будет приведён строгий математический вывод этой формулы.

Из своего опыта построения алгоритмов расчёта НДС всевозможных железобетонных элементов численным диаграммным методом [7] сходимость для него может быть рассмотрена в двух формах:

– как сходимость итерационного процесса вычислений (внешний цикл алгоритма), когда для получения результата выполняют последовательные итерации, получая последовательность значений некоего управляющего параметра (обычно кривизны продольной оси железобетонного стержня, реже – относительных продольных деформаций в характерной точке сечения): говорят, что эта последовательность сходится к точному (аналитическому) решению, если при неограниченном возрастании числа итераций решение стремится к действительному и в пределе (при устремлении числа итераций к бесконечности) равно ему;

– как сходимость дискретизации нелинейной деформационной модели нормального сечения при выполнении процедуры численного интегрирования (внутренний цикл алгоритма) нормальных напряжений, σ , секущих модулей, E^{sec} , жесткости по всем компонентам расчётного сечения: под сходимостью в таком случае следует подразумевать стремление значений решения дискретной модели к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении

к нулю параметра дискретизации (размера малых областей, $\Delta h \times \Delta b$, на которые разбивается сечение).

В статье [8] сходимость численного интегрирования методом Рунге-Кутты определяется условием $|R(\Delta h, \lambda)| < 1$, где R – функция линейной устойчивости (например, полином 4-го порядка), Δh – шаг разбивки, λ – параметр, определяющий связь между функцией и её производной. В монографии [9] рекомендуется для увеличения скорости сходимости использовать формулу Симпсона (правило одной трети). Вопросам сходимости численных методов посвящены также и другие актуальные зарубежные работы [10–15].

Методика. Исследуем последовательно вначале сходимость итерационного процесса вычислений внешнего цикла алгоритма численного диаграммного метода, а затем перейдём ко внутреннему циклу и вопросу дискретизации расчётной модели.

В работе [7] для стержневых элементов, в которых помимо прочих деформаций возникает изгиб, в самом общем виде постановка задачи для решения её численным диаграммным методом состоит в том, чтобы решить уравнение вида:

$$\chi = g(\chi), \quad (3)$$

с корнем t в интервале $[a; b]$. Здесь χ – кривизна оси стержня. При этом в качестве границ интервала, как показывает опыт расчётов, можно принять значения $a = -0,1$, $b = 0,1$ практически для любых железобетонных элементов. Функция g предполагается непрерывной на этом интервале.

Отметим, что при центральном растяжении либо сжатии $\chi = 0$. В таком случае в качестве управляющего параметра итерационного алгоритма можно принять осевую жёсткость сечения $D_{11} = v_b E_b A_b + v_s E_s A_s$.

Вообще говоря, при решении задач, связанных с изгибом железобетонных элементов, в качестве управляющего параметра итерационного алгоритма численного диаграммного метода, вместо кривизны χ , могут быть использованы и другие, связанные с ней параметры: предельный момент – M_{ult} (либо момент трещинообразования – M_{crc}), относительные деформации в характерных точках сечения – $\varepsilon_{bt}|_{y=0}$, $\varepsilon_s|_{y=a}$, $\varepsilon_b|_{y=y_0}$, $\varepsilon'_s|_{y=h-a}$, $\varepsilon_b|_{y=h}$, изгибная жёсткость сечения D_{33} , координата нейтральной линии y_0 и др. При этом, как показали собственные результаты расчётов, закономерности по сходимости алгоритма (приближения управляющего параметра к точному (аналитическому) своему значению) будут качественно идентичными. Причём

$$\|x\|_3 = \left| \frac{\Delta \chi}{\chi} \right| = \left| \frac{\Delta M_{ult}}{M_{ult}} \right| = \left| \frac{\Delta y_0}{y_0} \right| = \dots \text{ и т.д.}$$

Результаты. Решим уравнение (3) численным методом простой итерации. Так, если известен какой-либо член последовательности χ_k , например, $\chi_0 \in [a; b]$, то χ_{k+1} можно взять $g(\chi_k)$. Здесь $k=0, 1, 2, \dots, m$ – соответственно номер текущей итерации и общее количество итераций. Тогда рекуррентная формула метода имеет вид:

$$\chi_{k+1} = g(\chi_k). \quad (4)$$

Если существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k = z$ и функция g непрерывна в точке z , переходом к пределу в равенстве (4) получим $z = g(z)$, то есть число z является корнем уравнения (1). Если $z \in [a; b]$, то в силу единственности корня на отрезке $[a; b]$ z совпадает с t .

Вычисления по формуле (4) проиллюстрированы на рис. 1.

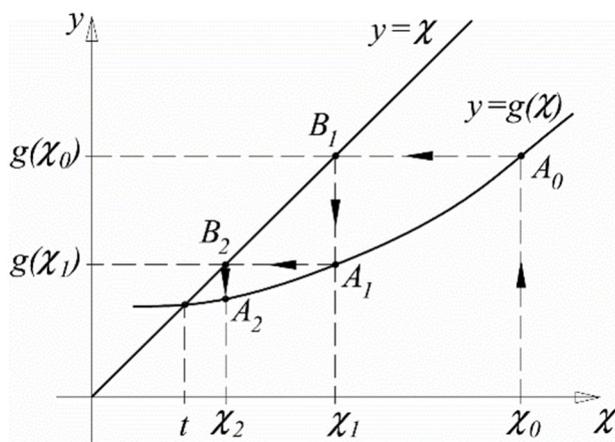


Рис. 1. К численному методу простой итерации для отыскания кривизны

Построим графики функций из левой и правой частей уравнения (3), то есть линии $y = \chi$ и

$y = g(\chi)$. Они должны пересекаться в точке с абсциссой t . Взяв некоторое число χ_0 , вычислим

$g(\chi_0)$ и получим на кривой $y=g(\chi)$ точку A_0 . Линия проекции этой точки на ось Oy пересечёт прямую $y=\chi$ в точке B_1 . Проекция B_1 на ось Ox даёт χ_1 . Из равенства треугольников $\Delta OB_1\chi_1$ и $\Delta OB_1g(\chi_0)$ геометрически $\chi_1=g(\chi_0)$. Проекция χ_1 на кривую $y=g(\chi)$ даёт точку A_1 . Линия проекции этой точки на ось Oy пересечёт прямую $y=\chi$ в точке B_2 . Проекция B_2 на ось Ox даёт χ_2 . Из равенства треугольников $\Delta OB_2\chi_2$ и $\Delta OB_2g(\chi_1)$ геометрически $\chi_2=g(\chi_1)$. Через какое-то количество итераций m величина $\chi_i = \chi_m$ настолько близко подойдёт к t , что её можно буде

считать ответом. Это количество шагов будет определять точность приближения $\Delta_2 > 0$ [1].

Далее запишем условия сходимости итерационного процесса решения. Пусть корень t уравнения (3) отделён на отрезке $[a;b]$ длины h . Если на отрезке $[c;d] = [a-h;b+h]$ функция g дифференцируема и найдётся число $0 < q < 1$ такое что

$$|g'(\chi)| \leq q, \tag{5}$$

при всех $\chi \in [c;d]$, то итерационная последовательность, предложенная формулой (4), сходится к корню t при любом выборе начального приближения $\chi_0 \in [a;b]$ (рис. 2).

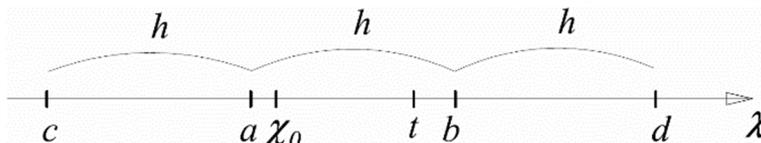


Рис. 2. К вопросу сходимости решения

Геометрически условие (5) означает, что угол наклона касательной к кривой g в любой точке из интервала $[c;d]$ должен быть меньше 45° ($tg45^\circ=1$), то есть меньше угла наклона прямой $y=\chi$ (а он равен ровно 45°). В этом случае линии $y=\chi$ и $y=g(\chi)$ будут иметь пересечение в искомой точке с абсциссой t .

При этом при всех $k=1,2,\dots,m$ числа $\chi_k \in [c;d]$ и верно неравенство (в теории численных методов оно принимается на основе доказательства соответствующей теоремы):

$$|t - \chi_k| \leq q^k h. \tag{6}$$

Это неравенство играет две полезных для нас роли. Во-первых, из него видно, что чем меньше число q , тем быстрее сходится последовательность приближений. Во-вторых, оно является основой для оценки погрешности итерационного метода, о чём чуть ниже.

Если известно, что значения $g(\chi)$ находятся в интервале $[a;b]$, то выполнение условия (5) достаточно потребовать лишь на $[a;b]$, тогда необходимость отрезка $[c;d]$ отпадает.

Запишем ещё одно утверждение: если на отрезке $[a;b]$ длины h функция g дифференцируема и

$$|g'(\chi)| \geq 1 \text{ при всех } \chi \in [a;b], \tag{7}$$

то определяемая формулой (4) итерационная последовательность не сходится к корню $t \in [a;b]$ ни при каком $\chi_0 \neq t$ из этого отрезка.

Геометрически условие (7) означает, что если угол наклона касательной к кривой g в каждой точке из интервала $[a;b]$ получается больше 45° , то есть больше угла наклона прямой $y=\chi$ (а он равен ровно 45°), то тогда линии $y=\chi$ и

$y=g(\chi)$ не будут иметь пересечения в рассматриваемом интервале.

Как уже было сказано выше, оценить погрешность итерационного метода можно из неравенства (6), согласно которому справедлива также следующая формула:

$$|t - \chi_k| \leq \frac{q}{1-q} |\chi_k - \chi_{k-1}|. \tag{8}$$

Обозначим $f(\chi) = \chi - g(\chi)$. Функция $f(\chi)$ дифференцируема, причём

$$|f'(\chi)| = |1 - g'(\chi)| \geq 1 - |g'(\chi)| \geq 1 - q \tag{9}$$

на $[c;d]$. Учитывая определение функции f и то, что $f(t) = 0$, имеем

$$|\chi_{k+1} - \chi_k| = |g(\chi_k) - \chi_k| = |-f(\chi_k)| = |f(t) - f(\chi_k)|$$

. Применив сначала теорему Лагранжа с некоторым числом d_n между t и χ_k , а затем неравенство (1), получим:

$$|\chi_{k+1} - \chi_k| = |f'(d_n)| |t - \chi_k| \geq (1 - q) |t - \chi_k|. \tag{10}$$

Модуль разности $|\chi_{k+1} - \chi_k|$ можно оценить и сверху. Поскольку

$\chi_{k+1} - \chi_k = g(\chi_k) - g(\chi_{k-1})$, на основе теоремы Лагранжа с числом p_n между χ_k, χ_{k-1} и неравенства (10), получим

$$|\chi_{k+1} - \chi_k| = |g'(p_n)| |\chi_k - \chi_{k-1}| \leq q |\chi_k - \chi_{k-1}| \tag{11}$$

Чтобы получить требуемую оценку (8), надо выделить $|t - \chi_k|$ из неравенства (10) и учесть (11).

Таким образом, если задана точность приближённого корня $\Delta > 0$, то итерационный

процесс необходимо закончить при выполнении условия

$$\Delta = \frac{q}{1-q} |\chi_k - \chi_{k-1}| \leq [\Delta] \quad (12)$$

и взять $t \approx \chi_k$.

Условие (12) и есть оценка погрешности численного метода простой итерации.

Число $0 < q < 1$ может быть принято произвольно, удобно взять $q=0,5$, тогда из (12) следует

$$\Delta = |\chi_k - \chi_{k-1}| \leq [\Delta]. \quad (13)$$

Мы получили строгое математическое обоснование для оценки точности (погрешности) численного диаграммного метода в случае изгиба или внецентренного сжатия. В относительных величинах условие (13) запишется:

$$\delta = \left| \frac{\chi_k - \chi_{k-1}}{\chi_k} \right| \cdot 100\% \leq [\delta]. \quad (14)$$

При этом по смыслу это и есть критерий сходимости по Чебышеву – см. формулу (2).

Рассмотрим теперь кратко сходимость дискретизации нелинейной деформационной модели нормального сечения при выполнении процедуры численного интегрирования (внутренний цикл алгоритма) изгибной

$$D'_{bx} = \Delta_h b \sum_{i=0}^{n-1} E_{b,i}^{sec} (y_0 - y_i)^2 \text{ – левые прямоугольники, степень полинома } m_p=0;$$

$$D'_{bx} = \Delta_h b \sum_{i=1}^n E_{b,i}^{sec} (y_0 - y_i)^2 \text{ – правые прямоугольники, } m_p=0;$$

$$D'_{bx} = \Delta_h b \sum_{i=0}^{n-1} E_{b,i+\frac{1}{2}}^{sec} \left(y_0 - y_{i+\frac{1}{2}} \right)^2 \text{ – средние прямоугольники, } m_p=1;$$

$$D'_{bx} = \frac{\Delta_h}{2} b \sum_{i=0}^{n-1} \left[E_{b,i}^{sec} (y_0 - y_i)^2 + E_{b,i+1}^{sec} (y_0 - y_{i+1})^2 \right] \text{ – трапеции, } m_p=1;$$

$$D'_{bx} = \frac{\Delta_h}{6} b \sum_{i=0}^{n-1} \left[E_{b,i}^{sec} (y_0 - y_i)^2 + 4 + E_{b,i+\frac{1}{2}}^{sec} \left(y_0 - y_{i+\frac{1}{2}} \right)^2 + E_{b,i+1}^{sec} (y_0 - y_{i+1})^2 \right] \text{ – формула}$$

Симпсона, $m_p=3$.

В СП 63.13330 применяется формула правых либо левых прямоугольников (не уточняется), как наиболее простая.

Получить аналитически критерий сходимости можно на основе остаточного члена той или иной квадратурной формулы (15) в виде

$$E(D_{bx}) = \frac{D_{bx}(y) - D'_{bx}(y)}{D_{bx}(y)} \leq [\delta_{21}], \quad (16)$$

где $[\delta_{21}] = 1...3\%$ заданная предельная погрешность [1].

Изменяя шаг дискретизации Δ_h расчётной схемы, можно добиться выполнения условия (16). При этом $E(D_{bx}) \rightarrow 0$, когда $\Delta_h \rightarrow 0$.

жёсткости на примере бетонной части поперечного сечения $D_{bx} = D_{bx}(y)$ (арматура дискретизации согласно численному диаграммному методу не подвергается, поэтому в исследовании сходимости с целью упрощения её жёсткость не учитываем). Для рассматриваемого примера

$$D_{bx}(y) = b \int_0^h E_b (y_0 - y)^2 dy, \quad \text{где}$$

$$E_b = \frac{\partial \sigma_b(\varepsilon_b, y, M, B, A... \alpha_j \dots)}{\partial \varepsilon_b(y, M, B, A... \alpha_j \dots)},$$

$y_0 = y_0(M, B, A... \alpha_j \dots)$ – сложные нелинейные функции многих переменных, получить аналитические формулы, для которых в принципе возможно и они будут довольно громоздкими, но в рамках данных исследований в этом нет необходимости. Тем не менее, функция $D_{bx}(y)$ может быть аппроксимирована полиномом нулевой, первой и четвёртой степени и соответственно для её вычисления используют формулы численного интегрирования прямоугольников (левых, правых и срединных), трапеций и Симпсона:

(15)

Исследуем вопрос сходимости численного диаграммного метода на примере железобетонного изгибаемого элемента прямоугольного профиля, $b \times h = 200 \times 500$ мм, изготовленного из тяжёлого бетона класса по прочности В10-В60 – var. Для бетона используется усовершенствованная криволинейная диаграмма Карпенко Н.И. [2], для арматуры – двухлинейная Прандтля по СП 63.13330. Площадь сечения нижней растянутой арматуры A_s – переменная (var), верхнее армирование – конструктивное (2Ø12 А500С). При этом общий процент армирования сечения $\mu = (A_s + A'_s) / (bh)$ меняется от 0,5 до 3 %. Привязка арматуры к граням бетона: $a_s = a'_s = 30$ мм. Для

удобства анализа решение уравнения (1) представим в виде известной зависимости $\chi_k = \frac{M_{ult,k}}{D_k}$, из неё получим $M_{ult,k} = \chi_k D_k$ – предельный изгибающий момент, который способно воспринять рассматриваемое железобетонное сечение. Для определения $M_{ult,k}$ воспользуемся ранее предложенным алгоритмом [2], но при этом будем вычислять его на каждой

итерации, количество которых примем $m=1...10$ – var. Количество разбиений на элементарные площадки по высоте сечения примем $n=20$ – const. Начальное приближение кривизны и координаты уровня нулевой линии соответственно: $\chi_0 = 0$ либо $\chi_0 = 10^{-5}$, $y_0 = \frac{h}{2} = 0,25$ м. Результаты вычисления $M_{ult,k}$ сведём в таблицы 1 и 2.

Таблица 1

Результаты вычисления $M_{ult,k}$, кН×м при $\chi_0 = 0$

№	Конструирование	Итерации									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B10, $\mu=0,5\%$	0	80.722	51.095	41.854	40.559	40.594	40.751	40.708	40.753	40.764
2	B35, $\mu=0,5\%$	0	178.785	82.246	54.464	48.753	47.719	47.368	47.369	47.37	47.37
3	B60, $\mu=0,5\%$	0	247.317	98.665	59.417	50.78	49.507	49.399	49.382	49.379	49.379
4	B10, $\mu=1,75\%$	0	96.536	104.782	105.648	106.592	107.136	107.324	107.387	107.408	107.415
5	B35, $\mu=1,75\%$	0	202.189	171.924	164.691	165.212	165.723	165.86	165.894	165.903	165.905
6	B60, $\mu=1,75\%$	0	274.067	203.775	187.29	185.479	184.952	184.962	184.964	184.964	184.964
7	B10, $\mu=3,0\%$	0	105.915	128.031	128.436	128.811	128.885	128.998	129.042	129.059	129.065
8	B35, $\mu=3,0\%$	0	219.958	227.188	224.973	225.769	226.303	226.449	226.488	226.498	226.5
9	B60, $\mu=3,0\%$	0	295.71	272.963	264.561	263.699	263.729	263.739	263.741	263.741	263.741

Таблица 2

Результаты вычисления $M_{ult,k}$, кН×м при $\chi_0 = 10^{-5}$

№	Конструирование	Итерации									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B10, $\mu=0,5\%$	182.656	43.489	40.874	40.497	40.714	40.789	40.722	40.756	40.765	40.768
2	B35, $\mu=0,5\%$	320.565	66.208	51.036	47.874	47.366	47.369	47.37	47.37	47.37	47.37
3	B60, $\mu=0,5\%$	365.497	83.148	55.728	50.5	49.483	49.395	49.381	49.379	49.379	49.379
4	B10, $\mu=1,75\%$	208.476	107.754	107.529	107.455	107.431	107.423	107.42	107.419	107.419	107.419
5	B35, $\mu=1,75\%$	347.837	165.594	164.813	165.609	165.83	165.887	165.901	165.904	165.905	165.905
6	B60, $\mu=1,75\%$	392.95	192.661	185.765	184.947	184.959	184.963	184.964	184.964	184.964	184.964
7	B10, $\mu=3,0\%$	230.016	134.103	130.423	129.502	129.222	129.125	129.09	129.077	129.072	129.07
8	B35, $\mu=3,0\%$	371.92	225.143	225.856	226.328	226.456	226.49	226.498	226.5	226.501	226.501
9	B60, $\mu=3,0\%$	417.493	266.654	264.253	263.712	263.735	263.74	263.741	263.741	263.741	263.741

Представим численные данные графически в системе координат « $M_{ult,k}/M_{ult,2} - k$ » – для табл. 1, и « $M_{ult,k}/M_{ult,1} - k$ » – для табл. 2, где $M_{ult,k}$, $M_{ult,1}$, $M_{ult,2}$ – предельный момент соответственно на текущей k -й, 1-й и 2-й итерациях.

Для табличных численных данных на 1-й и 10-й (последней) итерациях построим аппроксимирующую функцию двух переменных в виде полинома 2-й степени (двумерную полиномиальную регрессию порядка $n_p=2$): $F(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$, где $x = \mu = (0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 1,75 \ 1,75 \ 1,75 \ 3 \ 3 \ 3)^T$, $y = B = (10 \ 35 \ 60 \ 10 \ 35 \ 60 \ 10 \ 35 \ 60)^T$

, $F(x,y) = M_{ult,k}$ либо $F(x,y) = M_{ult,k}/M_{ult,1}$ ($F(x,y) = M_{ult,k}/M_{ult,2}$). Для полиномиальной поверхности порядка n_p количество точек аппроксимации должно быть больше или равно $n_{cp} = 9 \geq (n_p + 1)(n_p + 2)/2 = 6$ – условие выполняется. Средствами ПК *MathCAD*, применяя встроенную функцию *regress/interp*, построим следующие поверхности 2-го порядка, представленные на рис. 3.

Для дальнейшего изучения сходимости на рассматриваемом примере уравнение (5) запишем так:

$$|M'_{ult}| \leq q, \tag{17}$$

где q , напомним – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < q < 1$. Примем $q=0,5$.

В выражении (17) производную слева представим численно через соответствующие приращения функции $M_{ult,k+1} - M_{ult,k}$ и аргумента $k+1-k=1$, тогда:

$$|M_{ult,k+1} - M_{ult,k}| \leq 0,5. \quad (18)$$

Результаты расчёта левой части формулы (16) представим в таблицах ниже.

Таблица 3

Результаты вычисления левой части (16) при $\chi_0 = 0$

№	Конструирование	Итерации									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B10, $\mu=0,5\%$	-	80,722	29,627	9,241	1,295	0,035	0,157	0,043	0,045	0,011
2	B35, $\mu=0,5\%$	-	178,785	96,539	27,782	5,711	1,034	0,351	0,001	0,001	0
3	B60, $\mu=0,5\%$	-	247,317	148,652	39,248	8,637	1,273	0,108	0,017	0,003	0
4	B10, $\mu=1,75\%$	-	96,536	8,246	0,866	0,944	0,544	0,188	0,063	0,021	0,007
5	B35, $\mu=1,75\%$	-	202,189	30,265	7,233	0,521	0,511	0,137	0,034	0,009	0,002
6	B60, $\mu=1,75\%$	-	274,067	70,292	16,485	1,811	0,527	0,01	0,002	0	0
7	B10, $\mu=3,0\%$	-	105,915	22,116	0,405	0,375	0,074	0,113	0,044	0,017	0,006
8	B35, $\mu=3,0\%$	-	219,958	7,23	2,215	0,796	0,534	0,146	0,039	0,01	0,002
9	B60, $\mu=3,0\%$	-	295,71	22,747	8,402	0,862	0,03	0,01	0,002	0	0

Таблица 4

Результаты вычисления левой части (16) при $\chi_0 = 10^{-5}$

№	Конструирование	Итерации									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B10, $\mu=0,5\%$	-	139,167	2,615	0,377	0,217	0,075	0,067	0,034	0,009	0,003
2	B35, $\mu=0,5\%$	-	254,357	15,172	3,162	0,508	0,003	0,001	0	0	0
3	B60, $\mu=0,5\%$	-	282,349	27,42	5,228	1,017	0,088	0,014	0,002	0	0
4	B10, $\mu=1,75\%$	-	100,722	0,225	0,074	0,024	0,008	0,003	0,001	0	0
5	B35, $\mu=1,75\%$	-	182,243	0,781	0,796	0,221	0,057	0,014	0,003	0,001	0
6	B60, $\mu=1,75\%$	-	200,289	6,896	0,818	0,012	0,004	0,001	0	0	0
7	B10, $\mu=3,0\%$	-	95,913	3,68	0,921	0,28	0,097	0,035	0,013	0,005	0,002
8	B35, $\mu=3,0\%$	-	146,777	0,713	0,472	0,128	0,034	0,008	0,002	0,001	0
9	B60, $\mu=3,0\%$	-	150,839	2,401	0,541	0,023	0,005	0,001	0	0	0

а)

б)

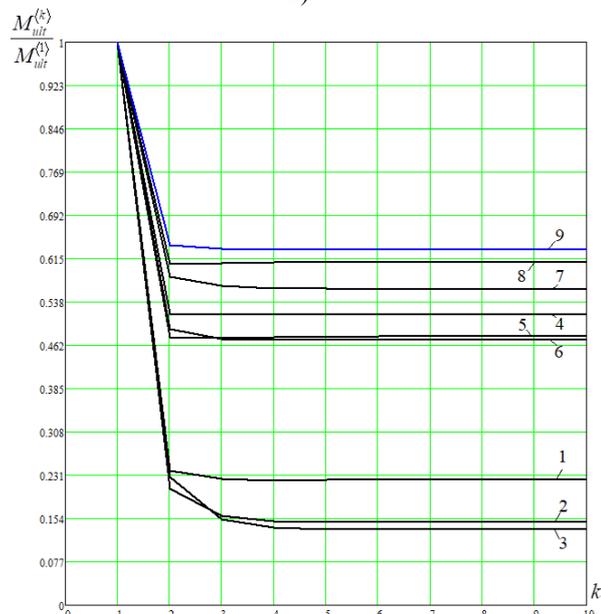
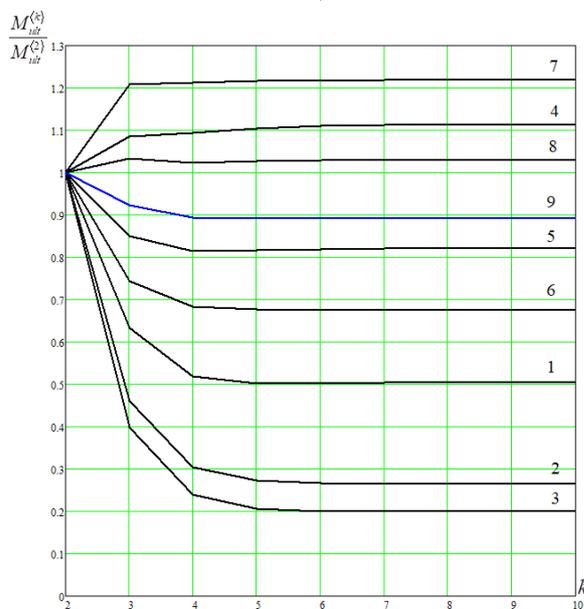


Рис. 2. Графики зависимости « $M_{ult,k} / M_{ult,2} - k$ » при $\chi_0 = 0$ (а) и « $M_{ult,k} / M_{ult,1} - k$ » при $\chi_0 = 10^{-5}$ (б) для различных вариантов конструирования железобетонного сечения 1...9 (см. табл. 1, 2)

а)

б)

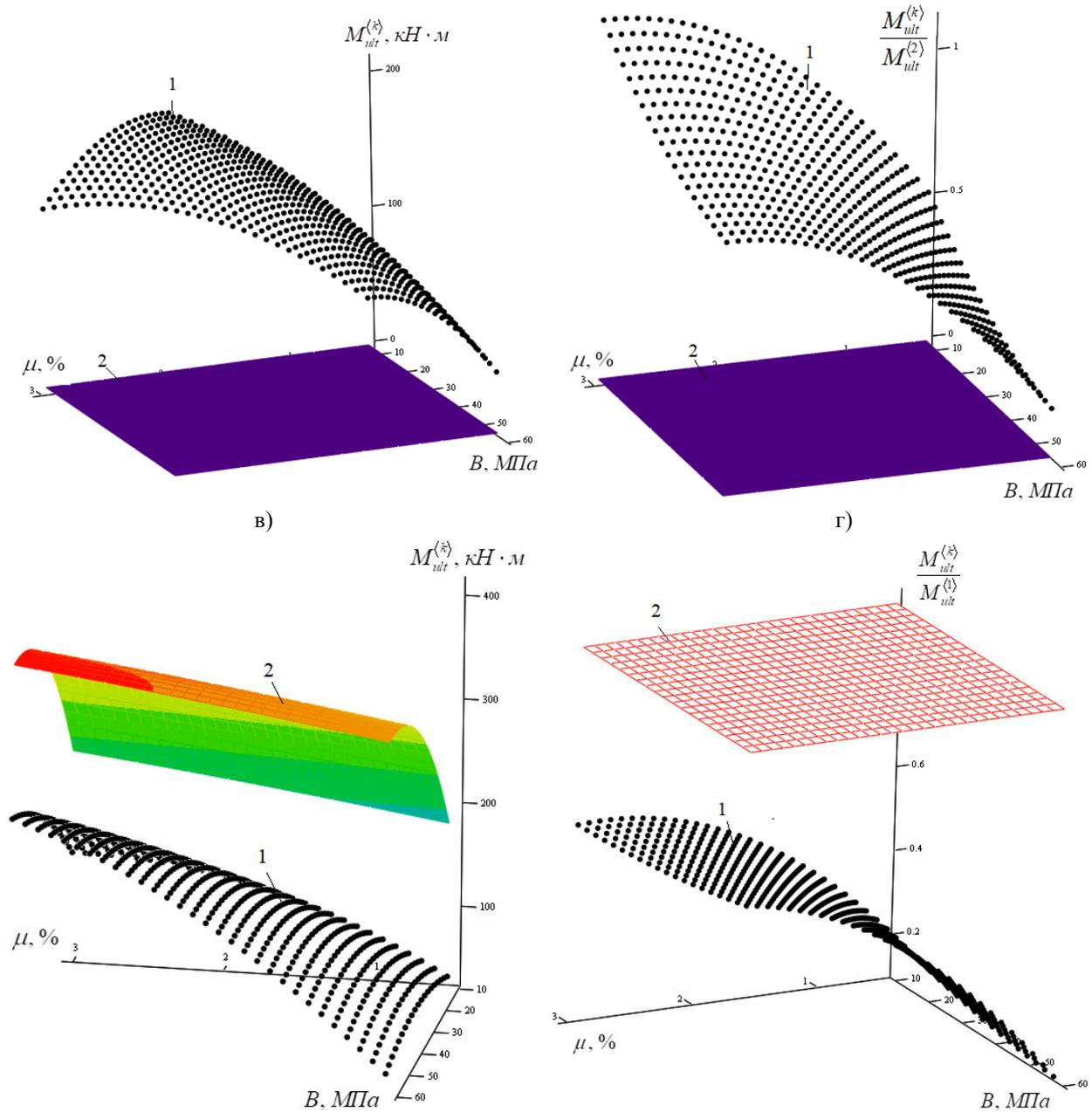


Рис. 2. Графики двумерной полиномиальной регрессии $F(\mu, B)$ для случая $\chi_0 = 0$ (а, б) и $\chi_0 = 10^{-5}$ (в, г):
 1 – на 10-й (последней итерации), 2 – на 1-й итерации (а, б) либо 2-й итерации (в, г)

Таблица 4

Результаты вычисления левой части (16) при $\chi_0 = 10^{-5}$

№	Конструирование	Итерации									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	V10, $\mu=0,5\%$	-	139,167	2,615	0,377	0,217	0,075	0,067	0,034	0,009	0,003
2	V35, $\mu=0,5\%$	-	254,357	15,172	3,162	0,508	0,003	0,001	0	0	0
3	V60, $\mu=0,5\%$	-	282,349	27,42	5,228	1,017	0,088	0,014	0,002	0	0
4	V10, $\mu=1,75\%$	-	100,722	0,225	0,074	0,024	0,008	0,003	0,001	0	0
5	V35, $\mu=1,75\%$	-	182,243	0,781	0,796	0,221	0,057	0,014	0,003	0,001	0
6	V60, $\mu=1,75\%$	-	200,289	6,896	0,818	0,012	0,004	0,001	0	0	0
7	V10, $\mu=3,0\%$	-	95,913	3,68	0,921	0,28	0,097	0,035	0,013	0,005	0,002
8	V35, $\mu=3,0\%$	-	146,777	0,713	0,472	0,128	0,034	0,008	0,002	0,001	0
9	V60, $\mu=3,0\%$	-	150,839	2,401	0,541	0,023	0,005	0,001	0	0	0

В таблицах 3 и 4 цветом выделены значения производной, удовлетворяющие неравенству (16).

Установлены следующие закономерности:

1 – для всех рассмотренных вариантов конструирования итерационный процесс вычислений сходится после 6-й итерации при $\chi_0 = 0$ и после 4-й итерации при $\chi_0 = 10^{-5}$, при этом относительная погрешность расчёта составляет менее $\delta < 1\%$;

2 – с увеличением класса бетона по прочности отношения $M_{ult,k}/M_{ult,1}$ и $M_{ult,k}/M_{ult,2}$ падают, исключение составляют сильно армированные элементы при $\chi_0 = 10^{-5}$, для них $M_{ult,k}/M_{ult,1}$ – растёт; соответственно в первом случае увеличение прочности бетона, а во втором – её уменьшение, приводит к необходимости увеличения числа итераций для обеспечения сходимости с заданной точностью;

3 – с увеличением процента армирования сходимость расчёта улучшается; например, при количестве итераций равном 4, погрешность при варианте конструирования В60, $\mu=0,5\%$ составляет 10,3%, а при В35, $\mu=3,0\%$ – 0,98%;

4 – для слабо- и среднеармированных элементов приближение к решению задачи (к корню уравнения $\chi=g(\chi)$) происходит слева, следовательно, тангенс угла карательной здесь

отрицательный, а функция $g(\chi)$ является убывающей, для сильно армированных элементов наоборот: приближение к решению задачи происходит справа, следовательно, тангенс угла карательной здесь положительный, а функция $\chi=g(\chi)$ является возрастающей; и при каких-то комбинациях значений параметров B и μ может быть достигнут минимум функции $g(\chi)$, в этом случае уже на 2-й итерации будет обеспечена нулевая погрешность расчёта;

5 – для улучшения сходимости в инженерных расчётах рекомендовано принимать начальное значение кривизны $\chi_0 = 10^{-5}$, а количество итераций – не менее 6, что обеспечит не превышение относительной погрешности расчёта $\delta < 1\%$.

Теперь перейдём к вопросу о влиянии числа разбиений n расчётного сечения железобетонного элемента на сходимость дискретизации нелинейной деформационной модели. На том же примере, рассмотренном выше, для характерных вариантов конструирования № 3 и 7 вычислим на 10-й итерации значение предельного момента $M_{ult,10}$ при числе разбиений равном $m=2,5, 10, 15$ и 20. Полученные результаты сведём в нижеследующие таблицу и график.

Таблица 5

Результаты вычисления $M_{ult,10}$, кН×м в зависимости от числа разбиений сечения n

№	Конструирование	Число разбиений сечения, n				
		2	5	10	15	20
3	В60, $\mu=0,5\%$	40.863	47.737	49.569	49.451	49.379
7	В10, $\mu=3,0\%$	122.093	129.101	129.203	129.124	129.065

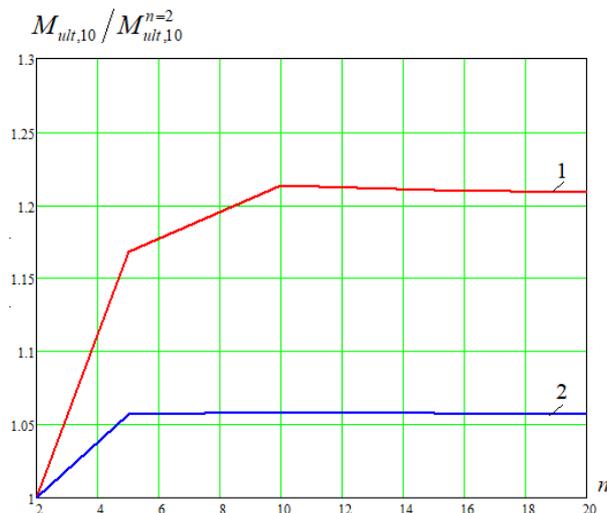


Рис. 3. График зависимости $M_{ult,10}$, кН×м от числа разбиений сечения n :
1 – для варианта конструирования №3, 2 – для варианта №7

Таким образом, сходимость дискретизации расчётной модели зависит от конструирования сечения: итерационные вычисления при высоком проценте армирования и низкой прочности бетона сходятся быстрее, чем при низком проценте армирования и высокой прочности бетона. При этом во всех случаях число разбиений $n \geq 10$ обеспечивает сходимость с приемлемой погрешностью менее 0,1 %.

Выводы.

1. Представлено теоретическое обоснование критерия сходимости численного диаграммного метода расчёта прочности железобетонных стержневых изгибаемых элементов. Полученный критерий подобен Чебышевой норме.

2. На примере элемента с прямоугольным железобетонным сечением и двойным армированием исследован вопрос сходимости итерационного расчёта прочности. Установлено, что для всех рассмотренных вариантов конструирования итерационный процесс вычислений сходится после 6-й итерации при начальном приближении кривизны $\chi_0 = 0$ и после 4-й итерации при $\chi_0 = 10^{-5}$, при этом относительная погрешность расчёта составляет менее $\delta < 1$ %.

3. Для улучшения сходимости в инженерных расчётах рекомендовано принимать начальное значение кривизны $\chi_0 = 10^{-5}$, а количество итераций – не менее 6, что обеспечит не превышение относительной погрешности расчёта $\delta < 1$ %.

4. Сходимость дискретизации расчётной модели зависит от конструирования сечения: итерационные вычисления при высоком проценте армирования и низкой прочности бетона сходятся быстрее, чем при низком проценте армирования и высокой прочности бетона. При этом во всех случаях число разбиений $n \geq 10$ обеспечивает сходимость с приемлемой погрешностью менее 0,1 %.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Радайкин О.В., Сабитов Л.С., Ключев С.В., Ахтямова Л.Ш., Аракчеев Т.П., Дарвиш А. Точность численного диаграммного метода расчёта стержневых железобетонных элементов // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2022. № 6. С. 25–34. DOI: 10.34031/2071-7318-2022-7-6-25-34

2. Коваленко Г.В., Меньщикова Н.С. Учет физической нелинейности железобетона при оценке изменения изгибной жесткости конструкций со смешанным армированием // Системы, методы, технологии. 2010. №1. С. 63–67.

3. Дыховичный А.А. Статически неопределимые железобетонные конструкции. Киев: Будівельник, 1978. 104 с.

4. Сливкер В.И. Расчёт конструкций с нелинейными связями. В сб. «Исследования по теории сооружения». Вып. XVI. М.: Стройиздат, 1968.

5. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций. Одесса: Издательство ОНМУ, 2009. 89 с.

6. Карпенко Н.И., Травуш В.И., Карпенко С.Н., Корсун В.И., Петров А.Н., Ерышев В.А., Ярин Л.И., Чепизубов И.Г., Моисеенко Г.А., Степанов М.В., Семенова Н.Г. Методическое пособие автоматизированные методы расчета массивных железобетонных конструкций при объемном напряженном состоянии. М.: ФАУ ФЦС, 2019. 137 с.

7. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Проектирование бетонных, железобетонных, каменных и армокаменных элементов и конструкций с применением диаграммных методов расчёта: монография. М.: Изд-во АСВ, 2019. 194 с.

8. Boldo S., Faissole F., Chapoutot A. Round-off Error Analysis of Explicit One-Step Numerical Integration Methods // 24th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, Jul 2017, London, United Kingdom [Electronic resource]. System requirements: Adobe Acrobat Reader. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01581794> (дата обращения 16.02.2022)

9. Hsu T.-R. Applied Engineering Analysis. Wiley & Sons, 2018. 528 p.

10. Nut G., Chiorean I., Blaga P. Convergence and Error of Some Numerical Methods for Solving a Convection-Diffusion Problem. Applied Mathematics. 2013. Vol. 4. No. 5A. Pp. 72-79.

11. Engquist B. Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics. Springer, 2015. 312 p.

12. Klivanov M.V., Li J., Zhang W. A globally convergent numerical method for a 3D coefficient inverse problem for a wave-like equation. Mathematics, 2016. 31 p.

13. Amat S., Busquier S. Convergence and numerical analysis of a family of two-step steffensen's methods Computers // Mathematics with Applications. 2005. Vol. 49. No. 1. Pp. 13–22.

14. Chasnov J.R. Numerical Methods. The Hong Kong University of Science and Technology, 2021. 60 p.

15. Turuna D.A., Woldaregay M.M., Duressa G.F. Uniformly Convergent Numerical Method for Singularly Perturbed Convection-Diffusion

Problems. Kyungpook Mathematical Journal. 2020.
No. 60. Pp. 629–645.

Информация об авторах

Радайкин Олег Валерьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры энергообеспечение предприятий, строительства зданий и сооружений. E-mail: olegxxii@mail.ru. Казанский государственный энергетический университет. Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51.

Сабитов Линар Салихзанович, кандидат технических наук, доцент кафедры энергообеспечение предприятий, строительства зданий и сооружений. E-mail: sabitov-kgasu@mail.ru. Казанский государственный энергетический университет. Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51. Казанский (Приволжский) федеральный университет. Россия, 420111, г. Казань, ул. Кремлёвская улица, д. 18.

Клюев Сергей Васильевич, кандидат технических наук, начальник УНИР. E-mail: Klyuyev@yandex.ru. Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова. Россия, 308012, Белгородская обл., г. Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

Хассун Мажд Сухайль, аспирант кафедры железобетонные и каменные конструкции. E-mail: king123king278@gmail.com. Казанский государственный архитектурно-строительный университет. Россия, 420097, г. Казань, ул. Зелёная, 1.

Аракчеев Тимур Павлович, заместитель руководителя. E-mail: ерс420107@mail.ru. ООО «ГК «ЭПЦ-Гарант». Россия, 420107, Республика Татарстан, г. Казань, Петербургская ул., д. 55, литера 3 офис 14.

Дарвиш Анас, аспирант кафедры энергообеспечение предприятий, строительства зданий и сооружений. E-mail: olegxxii@mail.ru. ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет». Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51.

Поступила 04.03.2022 г.

© Радайкин О.В., Сабитов Л.С., Клюев С.В., Хассун М.С., Аракчеев Т.П., Дарвиш А., 2022

^{1,*}Radaykin O.V., ^{1,2}Sabitov L.S., ³Klyuev S.V., ⁴Hassoun M.S., ⁵Arakcheev T.P., ¹Darvish A.

¹Kazan State Power Engineering University

²Kazan (Volga Region) Federal University

³Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov

⁴Kazan state University of architecture and construction

⁵LLC «GC «EPC-Garant»

*E-mail: olegxxii@mail.ru

CONVERGENCE OF THE NUMERICAL DIAGRAM METHOD OF NONLINEAR CALCULATION OF CORE REINFORCED CONCRETE ELEMENTS

Abstract. Earlier, authors considered the under-examined question of accuracy (error) in the theory of the diagram method for calculating reinforced concrete core elements. The notion of convergence of the numerical implementation of the method under consideration is closely related to it, which has so far remained undisclosed. The article presents a theoretical justification of the convergence criterion of a numerical diagram method for calculating the strength of reinforced concrete bendable elements. The resulting criterion coincides in form with the Chebyshev norm. It implies a criterion for stopping the iterative calculation process and an estimate of the error of the numerical diagram method. Using the example of a reinforced concrete element with a rectangular cross section and double reinforcement, the issue of convergence of iterative strength calculation with varying concrete class and percentage of reinforcement is investigated. It is established that for all the considered design variants, the iterative calculation process converges after the 6th iteration at the initial curvature approximation $\chi_0 = 0$ and after the 4th iteration at $\chi_0 = 10^{-5}$, with a relative calculation error of $\delta < 1\%$. In addition, it is found that with an increase in the percentage of reinforcement, the convergence of the calculation improves: with the number of iterations equal to 4, the error in the design variant B60, $\mu = 0.5\%$ is 10.3%, and with B35, $\mu = 3.0\%$ –0.98%.

Keywords: reinforced concrete, nonlinear deformation model, diagram method, deformation diagrams, numerical method, convergence.

REFERENCES

1. Radaykin O.V., Sabitov L.S., Klyuev S.V., Ahtjamova L.Sh., Arakcheev T.P., Darvish A. Accuracy of the numerical diagram method for calculating bar reinforced concrete elements. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2022. No. 6. Pp. 25–34. DOI: 10.34031/2071-7318-2022-7-6-25-34
2. Kovalenko G.V., Menshchikova N.S. Taking into account the physical nonlinearity of reinforced concrete when assessing changes in the bending stiffness of structures with mixed reinforcement [Uchet fizicheskoy nelineynosti zhelezobetona pri ocnke izmeneniya izgibnoj zhestkosti konstrukcij so smeshannym armirovaniem]. Systems, methods, technologies. 2010. No. 1. Pp. 63–67. (rus)
3. Dykhovichny A.A. Statically indeterminate reinforced concrete structures [Staticheski neopredelime zhelezobetonnye konstrukcii]. Kiev: Budivelnik. 1978. 104 p. (rus)
4. Slivker V.I. Calculation of constructions with nonlinear connections. Studies on the theory of construction [Raschyot konstrukcij s nelinejnymi svyazyami]. Issue XVI. M.: Stroyizdat. 1968. (rus)
5. Klovanych S.F., Bezushko D.I. Finite element method in nonlinear calculations of spatial reinforced concrete structures [Metod konechnyh elementov v nelinejnyh raschetah prostranstvennyh zhelezobetonnyh konstrukcij]. Odessa: ONMU Publishing House. 2009. 89 p. (rus)
6. Karpenko N.I., Travush V.I., Karpenko S.N., Korsun V.I., Petrov A.N., Yeryshev V.A., Yarin L.I., Chepizubov I.G., Moiseenko G.A., Stepanov M.V., Semenova N.G. Methodical manual automated methods for calculating massive reinforced concrete structures under volumetric stress state [Metodicheskoe posobie avtomatizirovannye metody rascheta massivnyh zhelezobetonnyh konstrukcij pri ob"emnom napryazhennom sostoyanii]. Moscow: FAA FTS, 2019. 137 p. (rus)
7. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaykin O.V. Design of concrete, reinforced concrete, stone and reinforced stone elements and structures with the use of diagram calculation methods: monograph [Proektirovanie betonnyh, zhelezobetonnyh, kamennyh i armokamennyh elementov i konstrukcij s primeneniem diagrammnyh metodov raschyota: monografiya]. Moscow: Publishing House of the ASV, 2019. 194 p. (rus)
8. Boldo S., Faissole F., Chapoutot A. Round-off Error Analysis of Explicit One-Step Numerical Integration Methods // 24th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, Jul 2017, London, United Kingdom [Electronic resource]. System requirements: Adobe Acrobat Reader. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01581794> date of the application 16.02.2022)
9. Hsu T.-R. Applied Engineering Analysis. Wiley & Sons, 2018. 528 p.
10. Nut G., Chiorean I., Blaga P. Convergence and Error of Some Numerical Methods for Solving a Convection-Diffusion Problem. Applied Mathematics. 2013. Vol. 4. No. 5A. Pp. 72–79.
11. Engquist B. Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics. Springer, 2015. 312 p.
12. Klibanov M.V., Li J., Zhang W. A globally convergent numerical method for a 3D coefficient inverse problem for a wave-like equation. Mathematics, 2016. 31 p.
13. Amat S., Busquier S. Convergence and numerical analysis of a family of two-step steffensen's methods Computers // Mathematics with Applications. 2005. Vol. 49. No. 1. Pp. 13–22.
14. Chasnov J.R. Numerical Methods. The Hong Kong University of Science and Technology, 2021. 60 p.
15. Turuna D.A., Woldaregay M.M., Duressa G.F. Uniformly Convergent Numerical Method for Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems. Kyungpook Mathematical Journal. 2020. No. 60. Pp. 629–645.

Information about the authors

Radaykin, Oleg V. PhD, Assistant Professor. E-mail: olegxxii@mail.ru. Kazan State Power Engineering University. Russia, 420066, Kazan, Krasnoselskaya str., 51.

Sabitov, Linar S. PhD, Assistant Professor. E-mail: sabitov-kgasu@mail.ru. Kazan State Power Engineering University. Russia, 420066, Kazan, Krasnoselskaya str., 51. Kazan (Volga Region) Federal University. Russia, 420111, Kazan, Kremlevskaya str., 18.

Klyuev, Sergey V. PhD, Head of the UNIR. E-mail: Klyuyev@yandex.ru. Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Hassoun, Majd S. postgraduate student. E-mail: king123king278@gmail.com. Kazan state University of architecture and construction. Russia, 420097, Kazan, Zelenaja str., 1.

Arakcheev, Timur P. Deputy head. E-mail: epc420107@mail.ru. LLC "GC "EPC-Garant". Russia, 420107, Republic of Tatarstan, Kazan, Peterburgskaya str., 55, litera 3 office 14.

Darvish Anas. Postgraduate student. E-mail: olegxxii@mail.ru. Kazan State Power Engineering University. Russia, 420066, Kazan, Krasnoselskaya str., 51.

Received 04.03.2022

Для цитирования:

Радайкин О.В., Сабитов Л.С., Ключев С.В., Хассун М.С., Аракчеев Т.П., Дарвиш А. Сходимость численного диаграммного метода нелинейного расчёта стержневых железобетонных элементов // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2022. № 7. С. 31–43. DOI: 10.34031/2071-7318-2022-7-7-31-43

For citation:

Radaykin O.V., Sabitov L.S., Klyuev S.V., Hassoun M.S., Arakcheev T.P., Darvish A. Convergence of the numerical diagram method of nonlinear calculation of core reinforced concrete elements. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 2022. No. 7. Pp. 31–43. DOI: 10.34031/2071-7318-2022-7-7-31-43