

Галагуз Ю.П., ст. пр.,
Сафина Г.Л., канд. тех. наук, доц.

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

coneil@mail.ru

Влияние фильтрации подземных вод на прочность грунта необходимо учитывать при проектировании туннелей и гидротехнических сооружений. При прохождении потока суспензии через пористую горную породу часть твердых частиц застревают в порах и образуют осадок. Осажденные частицы блокируют поры и влияют на интенсивность потока грунтовых вод. В работе рассматривается одномерная математическая модель фильтрации монодисперсной суспензии в неоднородной пористой среде. Предполагается, что при задержании твердых частиц суспензии порами основную роль играет механико-геометрический механизм захвата частиц. Предлагаемая модель учитывает изменение пористости и проницаемости пористой среды при образовании осадка. Получено численное решение задачи методом конечных разностей.

Ключевые слова: суспензия, пористая среда, задача фильтрации, взвешенные и осажденные частицы, численное моделирование.

Введение. При проектировании и строительстве оснований и фундаментов необходимо учитывать влияние фильтрации подземных вод на прочность грунта. Задача фильтрации суспензии в пористой среде описывает изменение характеристик горной породы при осаждении в порах твердых частиц [1–3].

Пористая среда – это твердое тело, содержащее тонкие полые каналы различной длины и поперечного сечения (поры). При прохождении потока суспензии (несущей жидкости с взвешенными частицами) через пористую среду некоторые частицы застревают в порах и образуют осадок. Геометрическая модель захвата частиц предполагает, что частицы застревают на входе малых пор, и беспрепятственно проходят через поры большого поперечного сечения.

Базовая модель фильтрации монодисперсной суспензии предполагает, что скорость частиц в пористой среде постоянна, и осадок не влияет на пористость и проницаемость пористой среды [4–6]. Более сложные модели фильтрации в одномерной пористой среде учитывают изменение пористости и проницаемости при образовании осадка, и непостоянство скорости движения взвешенных частиц [7].

В ряде задач фильтрации найдено точное решение [7–9], в других строится асимптотика [10–14]. Если аналитическое решение отсутствует, для решения задачи используются численные методы [15–17].

В работе рассматривается математическая модель фильтрации монодисперсной суспензии в неоднородной пористой среде, учитывающая изменение пористости и коэффициента фильтрации при образовании осадка. Суспензия постоянной концентрации впрыскивается в пористую

среду, не содержащую взвешенных и осажденных частиц. Задача состоит в нахождении концентраций взвешенных $C(x, t)$ и осажденных $S(x, t)$ частиц в пористой среде. Получено численное решение задачи методом конечных разностей [18].

Постановка задачи. Одномерная модель фильтрации суспензии в неоднородной пористой среде с изменяющейся пористостью и проницаемостью состоит из двух уравнений в частных производных

$$\frac{\partial(g(x, S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(x, S)C. \quad (2)$$

Здесь коэффициент фильтрации $\Lambda(x, S)$, пористость $g(x, S)$ и проницаемость пористой среды $f(S)$ являются непрерывными функциями, $\Lambda(x, S)$ неотрицательная, $g(x, S)$ и $f(S)$ строго положительны при $0 \leq x \leq 1$, $S \geq 0$.

Система уравнений (1), (2) рассматривается в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$.

Краевые условия для системы (1), (2) ставятся на входе фильтра $x = 0$ и в начальный момент времени $t = 0$:

$$C(x, t)|_{x=0} = 1, \quad (3)$$

$$C(x, t)|_{t=0} = 0; \quad S(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Условия (3), (4) определяют единственное решение задачи в области Ω .

Подвижная граница области, заполненной частицами, и пустой части пористой среды называется фронтом концентраций взвешенных и осажденных частиц. Фронт концентраций является характеристической линией уравнения (1), выходящей из начала координат.

Поскольку условия (3) и (4) не согласованы в нуле, то согласно теории характеристик на фронте концентраций решение C имеет сильный разрыв; а решение S – слабый разрыв (разрыв производных первого порядка). За фронтом концентрации в области $\{(x,t): 0 < x < 1, t > x\}$ решение положительно $C > 0, S > 0$; перед фронтом в $\{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < x\}$ задача (1)-(4) имеет нулевое решение $C = 0, S = 0$.

Фронт концентраций взвешенных и осажденных частиц распространяется в пористой среде с переменной скоростью

$$v = \frac{f(0)}{g(x,0)}. \tag{5}$$

Точное решение на входе фильтра. Уравнение (2) на входе фильтра $x = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(0, S). \tag{6}$$

Делим обе части уравнение (6) на $\Lambda(0, S)$

$$\frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(0, S)} = 1 \tag{7}$$

и интегрируем (7) относительно переменной t

$$\int_0^t \frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(0, S)} dt = t. \tag{8}$$

Используя условие (4), преобразуем интеграл в левой части (8)

$$\int_0^{S(0,t)} \frac{dS}{\Lambda(0, S)} = t. \tag{9}$$

Формула (9) задает концентрацию осажденных частиц на входе фильтра.

Рассмотрим наиболее важные примеры коэффициентов фильтрации. Коэффициент фильтрации $\Lambda(x, S)$ называется блокирующим, если он положителен при $0 \leq x \leq 1, 0 \leq S < S_M$, и обращается в ноль при $S = S_M$. В этом случае концентрация осажденных частиц ограничена величиной S_M .

Рассмотрим наиболее важные примеры коэффициентов фильтрации. Коэффициент фильтрации $\Lambda(x, S)$ называется блокирующим, если он положителен при $0 \leq x \leq 1, 0 \leq S < S_M(x)$, и обращается в ноль при $S \geq S_M(x)$. В этом случае

концентрация осажденных частиц ограничена величиной $S_M(x)$.

А) Для линейного блокирующего коэффициента фильтрации

$$\Lambda(x, S) = \lambda(x)(S_M(x) - S), \tag{10}$$

где $\lambda(x) > 0, S_M(x) > 0$, интеграл в левой части (9) вычисляется явно:

$$\int_0^{S(0,t)} \frac{dS}{\lambda(0)(S_M(0) - S)} = \frac{1}{\lambda(0)} \ln \left| \frac{S_M(0)}{S_M(0) - S(0,t)} \right|. \tag{11}$$

Концентрация осажденных частиц на входе фильтра для коэффициента фильтрации (10) имеет вид

$$S_1(t) = S_M(0)(1 - e^{-\lambda(0)t}). \tag{12}$$

Б) Для квадратичного блокирующего коэффициента фильтрации

$$\Lambda(x, S) = \lambda(x)(S_M(x) - S)^2 \tag{13}$$

интеграл (9) равен

$$\int_0^{S(0,t)} \frac{dS}{\lambda(0)(S_M(0) - S)^2} = \frac{S}{\lambda(0)S_M(0)(S_M(0) - S(0,t))}. \tag{14}$$

Зависимость от времени концентрации осажденных частиц на входе фильтра задается соотношением

$$S_2(t) = \frac{S_M^2(0)\lambda(0)t}{1 + S_M(0)\lambda(0)t}. \tag{15}$$

Формулы (12), (15) показывают, что функция $S(0, t)$ монотонно возрастает и при больших значениях времени t стремится к предельному значению $S_M(0)$.

На рис. 1 а), б) показаны графики концентрации осажденных частиц на входе фильтра для блокирующих коэффициентов фильтрации (12) и (15) для значения параметров $\lambda(0) = 1, S_M(0) = 1$.

Расчет осуществляется методом конечных разностей. Для уравнения (1) применяется TVD-версия схемы Лакса-Вендроффа. Для уравнения (2) используется метод Рунге-Кутты второго порядка. Решение системы (1)-(4) получено в области $\{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < 15\}$. Шаг интегрирования по x : $h = 0.001$, шаг по t : 0.0005 . Схема удовлетворяет условию Куранта-Фридрихса-

Леви: $\tau \leq \min_{x \in [0,1], t \in [0,15]} \left(\frac{g(x, S(x,t))}{f(S(x,t))} \right) \cdot h$.

Численный расчет задачи выполнен для коэффициентов уравнений (1), (2)

$$g(x, S) = (1 - 0,1x)(1 - 0,2S), \quad f(x, S) = (1 - 0,4S),$$

$$\Lambda(x, S) = (1 + 0,2x)(1 - S).$$

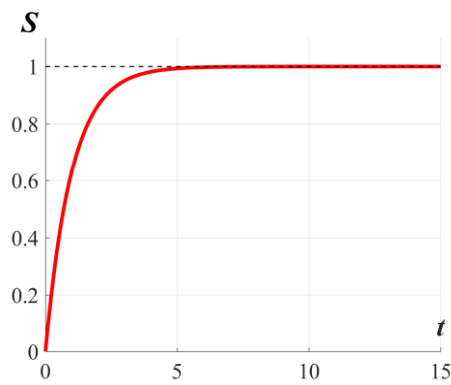
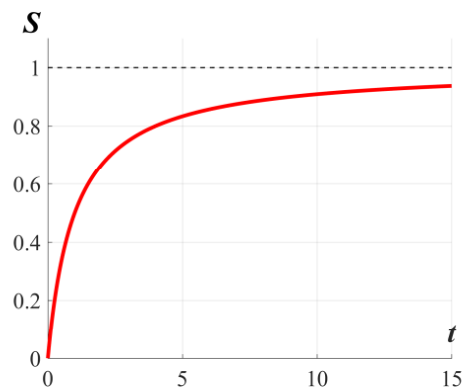


Рис. 1. а) Концентрация осажденных частиц $S_1(t)$.



б) Концентрация осажденных частиц $S_2(t)$.

На рис. 2 а) и б) представлены 3-D графики концентраций взвешенных и осажденных частиц.

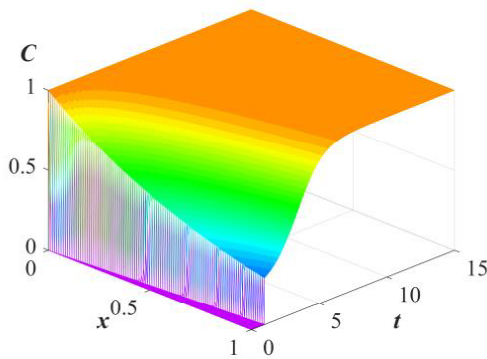
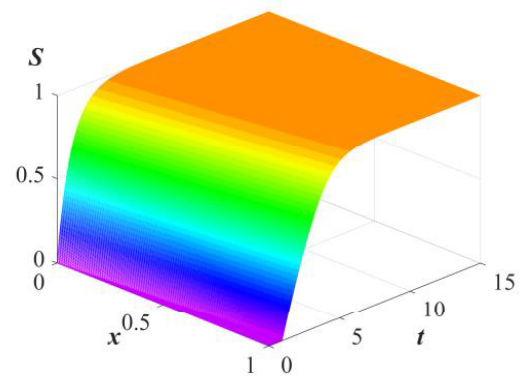


Рис. 2. а) Концентрация взвешенных частиц $C(x,t)$.



б) Концентрация осажденных частиц $S(x,t)$.

Графики концентраций взвешенных частиц при фиксированном времени $t = 0.5$ и при фиксированном расстоянии $x = 1.0$ изображены на рис. 3 а) и б).

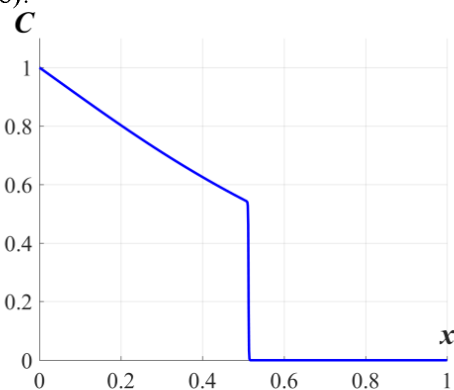
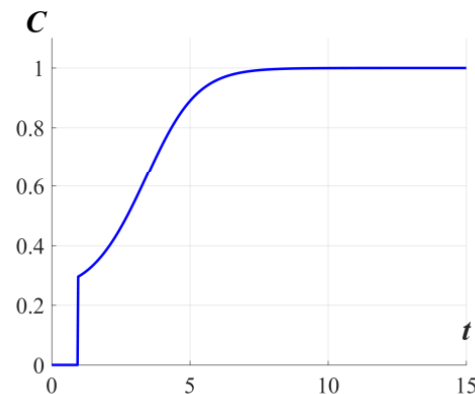
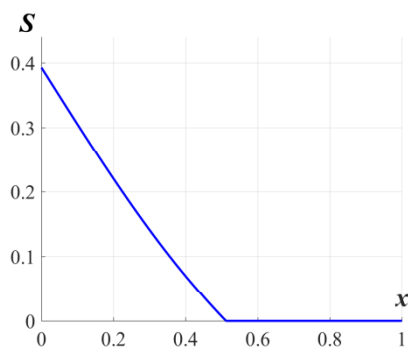
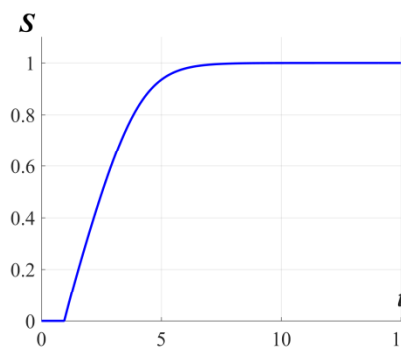


Рис. 3. а) Концентрация взвешенных частиц $C(x,t)|_{t=0.5}$.



б) Концентрация взвешенных частиц $C(x,t)|_{x=1.0}$.

Графики концентраций осажденных частиц при фиксированном времени $t = 0.5$ и при фиксированном расстоянии $x = 1.0$ изображены на рис. 4 а) и б).

Рис. 4. а) Концентрация осажденных частиц $S(x, t)|_{t=0.5}$.б) Концентрация осажденных частиц $S(x, t)|_{x=1.0}$.

Заключение. В работе найдено численное решение одномерной задачи фильтрации монодисперсной суспензии в неоднородной пористой среде. В отличие от стандартных моделей, рассматривающих однородную пористую среду, рассчитана задача, в которой пористость и коэффициент фильтрации зависят не только от концентрации осажденных частиц $S(x, t)$, но и от расстояния x до входа фильтра. Рис. 2 показывает, как взвешенные и осажденные частицы постепенно заполняют пористую среду, двигаясь от входа $x=0$ к выходу $x=1$. Фронт концентраций взвешенных и осажденных частиц - граница раздела двух частей пористой среды - пустой и заполненной частицами движется со скоростью $v = \frac{f(0)}{g(x, 0)}$, и в некоторый момент времени до-

стигает выхода (рис. 2). В каждой точке x пористой среды происходит накопление осадка. Чем больше значение x , тем позже в эту точку доходит фронт концентраций и начинается образование осадка (рис. 2). С ростом осадка скорость прироста осажденных частиц уменьшается. С увеличением времени концентрация осажденных частиц стремится к предельному значению $S_M=1$. При больших временах накопление осадка прекращается и концентрация взвешенных частиц стремится к максимальному значению на входе пористой среды $C=1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Khilar K.C., Fogler H.S. Migrations of fines in porous media. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 180 p.
2. Santos A., Bedrikovetsky P., Fontoura S. Analytical micro model for size exclusion: Pore blocking and permeability reduction // Journal of Membrane Science. 2008. Vol. 308. №. 1. Pp. 115–127.
3. Civan F. Reservoir formation damage: fundamentals, modeling, assessment, and mitigation. Gulf Professional Publishing, 3rd ed., 2016. 1044 p.

4. Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P. Flow of suspensions through porous media - application to deep filtration // Industrial and Engineering Chemistry. 1970. Vol. 62. Pp. 8–35.

5. Vyazmina E.A., Bedrikovetskiy P.G., Polyaniin A.D. New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2007. Vol. 41. Iss. 5. Pp. 556–564.

6. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Particle transportation at the filter inlet // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Vol. 10. Iss.3. Pp. 17–22.

7. You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media // Abstract and Applied Analysis. 2013. Vol. 2013. Iss. "Mathematical and Computational Analyses of Flow and Transport Phenomena". 9 p.

8. Кузьмина Л.И., Осипов Ю. В. Расчет фильтрации с двумя механизмами захвата частиц // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 1. С. 59–64.

9. L.I. Kuzmina, Yu.V. Osipov Calculation of filtration of polydisperse suspension in a porous medium // MATEC Web of Conferences. 2016. Vol. 86. №. 01005. 5 p.

10. You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic model for deep bed filtration // Chemical Engineering Journal. 2014. Vol. 258. Pp. 374–385.

11. Kuzmina L., Osipov Yu. Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111. Pp. 491–494.

12. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Deep Bed Filtration Asymptotics at the Filter Inlet // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. Pp. 366–370.

13. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Asymptotic model of filtration in almost stationary mode // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Vol. 12. Iss.1. Pp. 158–163.

14. Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Асимптотика задачи фильтрации суспензии в пористой среде // Вестник МГСУ. 2015. № 1. С. 54–62.
15. Голубев В.И., Михайлов Д.Н. Моделирование динамики фильтрации двухчастичной суспензии через пористую среду // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. С. 143–147.
16. Galaguz Y.P., Safina G.L. Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153. Pp. 157–161.
17. Galaguz Y.P., Safina G.L. Modeling of fine migration in a porous medium // MATEC Web of Conferences. 2016. Vol. 86. №. 03003. 6 p.
18. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, Dordrecht, 2009. 724 p.
19. Галагуз Ю.П. Реализация TVD-схемы численного решения задачи фильтрации // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. Vol. 13. Iss. 2. Pp. 93–102.

Информация об авторах

Галагуз Юрий Петрович, старший преподаватель кафедры прикладной математики.

E-mail: coneil@mail.ru

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет.
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

Сафина Галина Леонидовна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики.

E-mail: minkinag@mail.ru

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

Поступила в сентябре 2017 г.

© Галагуз Ю.П., Сафина Г.Л., 2017

Galaguz Yu.P., Safina G.L.

MODELING OF FILTRATION IN A HETEROGENEOUS POROUS MEDIUM

The influence of groundwater filtration on soil strength should be taken into account when designing tunnels and hydraulic structures. As the suspension flows through the porous rock, a part of the solid particles get stuck in the pores and form a deposit. The retained particles clog the pores and affect the intensity of the groundwater flow. The paper deals with a one-dimensional mathematical model for the deep bed filtration of a monodisperse suspension in a heterogeneous porous medium. It is assumed that in the retention of solid particles of the suspension by pores, a size-exclusion mechanism of particle capture plays the main role. The proposed model takes into account the change in the porosity and permeability of the porous medium during the formation of the deposit. A numerical solution of the problem is obtained by finite differences method.

Keywords: *suspension, porous medium, filtration problem, suspended and retained particles, numerical modeling.*

Information about the authors

Galaguz Yuri Petrovich, Senior lecturer.

E-mail: coneil@mail.ru@mail.ru

National Research Moscow State University of Civil Engineering.
Russia, 129337, Moscow, Yaroslavl'skoe shosse, 46.

Safina Galina Leonidovna, PhD, Assistant professor.

E-mail: minkinag@mail.ru

National Research Moscow State University of Civil Engineering.
Russia, 129337, Moscow, Yaroslavl'skoe shosse, 46.

Received in September 2017

© Galaguz Yu.P., Safina G.L., 2017