DOI: 10.12737/article_5940f01aa31c67.20778918

Ковальчук О.А, канд. техн. наук, доц.,
Леонтьев А.Н., канд. техн. наук, доц.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КАРКАСА ЗДАНИЯ

oko44@mail.ru

В статье используется вариант метода суперэлементов (МСЭ), ориентированный именно на систему расчета несущей стержневой конструкции, смысл которого эквивалентен методу вырезания узлов. По сути, смысл разрешающих уравнений не отличается от классических вариантов метода конечных или суперэлементов. В статье представлены аналитические решения для статических и динамических задач. Описан алгоритм расчета. Рассматривается вопрос об устойчивости системы в целом. Предложенный вариант расчета можно применять при моделировании пространственных конструктивных систем каркасного типа.

Ключевые слова: *ансамбль конечных элементов, матрица жесткости, запроектные воздействия, устойчивость системы, частота свободных колебаний стержневой системы.*

Введение. В основу системы расчета здания положен принцип: «один стержневой элемент – один суперэлемент» [1]. В отличие от традиционного подхода, состоящего в приписывании конечному элементу полиномиальных функций формы, суть принятой концепции заключается в использовании аналитических решений задач статики и динамики прямого стержня, которым придается специфический, характерный для МКЭ, вид.

Уравнения для стержневых элементов. Напряженно-деформированное состояние (НДС) стержня в каждом взятом сечении может быть описано с помощью двух групп параметров. Одна группа представляет кинематические характеристики (деформированное состояние), а вторая – возникающие в ходе этого внутренние силовые факторы:

$$\mathbf{U}(x)=\begin{Bmatrix} u\\ v\\ w\end{Bmatrix},\quad \Theta(x)=\begin{Bmatrix}\theta_x\\ \theta_n\\ \theta_b\end{Bmatrix},\quad \mathbf{M}(x)=\begin{Bmatrix}M_x\\ M_n\\ M_b\end{Bmatrix},\quad \mathbf{Q}(x)=\begin{Bmatrix}N\\ Q_n\\ Q_b\end{Bmatrix}. \tag{1}$$

В системе расчета удобно применить принцип гипотезы Бернулли о плоских сечениях и о ненадавливании слоев [2] и подходы, рассмотренные в [3, 4, 5]. Необходимо отметить, что не для всех условий деформирования, например, железобетонных элементов строительных конструкций использование гипотезы плоских сечений является справедливым [6].

В соответствии с принятыми нами гипотезами движение описывается системой дифференциальных уравнений движения, геометрическими и физическими соотношениями:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N}{\partial x}-\rho\cdot A\cdot\ddot{u}=-q_x;\ \frac{\partial Q_n}{\partial x}-\rho\cdot A\cdot\ddot{v}=-q_n;\ \frac{\partial Q_b}{\partial x}-\rho\cdot A\cdot\ddot{w}=-q_b;\\ \frac{\partial M_x}{\partial x}-\rho\cdot J_p\cdot\ddot{\theta}_x=-m,\ \frac{\partial M_n}{\partial x}-Q_b=0,\ \frac{\partial M_n}{\partial x}-Q_y=0,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{N}{E\cdot A};\ \frac{\partial v}{\partial x}=\theta_b;\ \frac{\partial w}{\partial x}=\theta_n;\\ \frac{\partial\theta_x}{\partial x}=-\frac{M_x}{G\cdot J_p};\ \frac{\partial\theta_n}{\partial x}=-\frac{M_n}{E\cdot J_n},\ \frac{\partial\theta_b}{\partial x}=-\frac{M_b}{E\cdot J_b}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения: A – площадь поперечного сечения стержня; J_n, J_b – главные центральные моменты инерции поперечного сечения, $J_p = J_n+J_b$ – полярный момент инерции, E – модуль упругости (модуль Юнга), G – модуль сдвига.

Используя для (4) матричную форму записи, получим:

$$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial x}=\mathrm{S}\mathbf{y}-\mathrm{D}\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial t^2}+\mathbf{F}(x), \tag{4}$$

где вектор состояния:

$$\mathbf{y}=\{u\ \ v\ \ w\ \ \theta_x\ \theta_n\ \theta_b\ M_x\ M_n\ M_b\ N\ Q_n\ Q_b\}^T, \tag{5}$$

вектор распределенных нагрузок:

$$\mathbf{F}=\left\{0\,0\,0\,0\,0\,0-m\,0\,0-q_x-q_n-q_b\right\}^T, \quad (6)$$

матрица жесткости S и матрица инерции D, структура которых очевидна из (2, 3). При решении статических задач матрицу D следует положить равной нулю.

Решение статических задач. Для решения статических задач имеем решение задачи Коши:

$$\mathbf{y}(x)=\mathrm{V}(x)[\mathbf{y}(0)+\mathbf{F}(x)], \quad (7)$$

где введена матрица влияния V(x), которая может быть элементарно получена аналитическим решением системы (2, 3) при известных внешних распределенных нагрузках $\boldsymbol{F}$. Компоненты матрицы V представляют собой степенные функции не выше 3 степени. Решение (7) можно представить разделением на две части, первая из которых определяет кинематические факторы в произвольной точке стержня через силовые и кинематические параметры состояния в начале стержня:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_C(x)&=\mathrm{V}_{\mathrm{CC}}(x)\mathbf{y}_C(0)+\mathrm{V}_{\mathrm{CF}}(x)\mathbf{y}_F(0)+\mathrm{V}_{\mathrm{CF}}(x)\mathbf{F}_F(x),\\ \mathbf{y}_F(x)&=\mathrm{V}_{\mathrm{FC}}(x)\mathbf{y}_C(0)+\mathrm{V}_{\mathrm{FF}}(x)\mathbf{y}_F(0)+\mathrm{V}_{\mathrm{FF}}(x)\mathbf{F}_F(x).\end{aligned} \quad (8)$$

Записывая первое уравнение (8) для конца стержня, исключим силовые факторы $\boldsymbol{y}_F(0)$ через кинематические факторы в конце стержня $\boldsymbol{y}_C(L)$, где L – длина стержня:

$$\mathbf{y}_F(0)=\mathrm{V}_{\mathrm{CF}}(L)^{-1}\{\mathbf{y}_C(L)-\mathrm{V}_{\mathrm{CC}}(L)\mathbf{y}_C(0)-\mathrm{V}_{\mathrm{CF}}(L)\mathbf{F}_F(L)\} \quad (9)$$

Записывая второе уравнение (8) для конца стержня, и исключая силовые факторы в начале стержня через (9) получаем выражения для силовых факторов в начале и конце стержня через кинематические факторы в начале и конце стержня. Уравнению (9) и его аналогу для $x=L$ можно придать вид, характерный для МКЭ:

$$\mathbf{P}=\mathrm{K}_{FE}\mathbf{q}+\mathbf{F}_{FE}, \quad (10)$$

где $\mathbf{P}=\{\mathbf{y}_F(0);\mathbf{y}_F(L)\}$ – вектор узловых сил; $\mathbf{q}=\{\mathbf{y}_C(0);\mathbf{y}_C(L)\}$ – вектор узловых перемещений, K_{FE} – матрица жесткости КЭ, $\mathbf{F}_{FE}$ – вектор узловых сил от заданных распределенных нагрузок.

Так как выражение (10) имеет такой же физический смысл, что и аналогичное выражение МКЭ, то для формирования матричных характеристик ансамбля элементов следует использовать известный алгоритм метода конечных элементов [7, 8].

Решение статических задач очевидно: так как выражение имеет смысл внутренних сил, действующих на начало и конец стержня, то после вычисления МЖ ансамбля КЭ получается система уравнений равновесия узлов:

$$\mathrm{K}_{AFE}\mathbf{q}+\mathbf{F}_{AFE}=0. \quad (11)$$

Так решается задача о состоянии стержневой системы под действием собственного веса, под действием сборных перекрытий, перегородок и т.п.

Решение динамических задач. Для решения динамических задач используем метод модального разложения, в соответствии с которым перемещения представляются обобщенным рядом Фурье по формам свободных колебаний стержня (а для системы стержней – по ее формам свободных колебаний) [9, 10]. Таким образом, определяющим является решение задачи о свободных колебаниях одного стержня.

Для этого запишем однородное уравнение динамики, сопутствующее (4):

$$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial x}=\mathrm{A}\mathbf{y}-\mathrm{D}\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Полагая, что свободные колебания упругого стержня представляются гармонической функцией времени: $\mathbf{y}(x,t)=\mathbf{Y}(x)e^{i\omega t}$, из (12) получим спектральное уравнение:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx}=\left[\mathrm{A}+\omega^2\mathrm{D}\right]\mathbf{Y}. \quad (13)$$

Его решение получается с использованием преобразования Лапласа через балочные функции Крылова и тригонометрические функции [11, 12]. Так как (13) представляет собой задачу Коши, то его можно записать в форме (7), где вектор внешних нагрузок следует опустить. Но в силу этой аналогии можно провести те же рассуждения, что и в статике и получить решение в той же форме, что и (10) (конечно, без внешних сил):

$$\mathbf{P}(\omega)=\mathrm{K}_{FE}(\omega)\mathbf{q}(\omega). \quad (14)$$

Отметим, что физический смысл (14) такой же, как и (10); следовательно, при моделировании стержневой системы можно также применить алгоритма МКЭ [4]. В отличие от статической задачи, задача (14) содержит неизвестный параметр ω – частоту свободных колебаний стержневой системы. Этот параметр определяется из трансцендентного уравнения

$$\det\{\mathrm{K}_{AFE}(\omega)\}=0, \quad (15)$$

где K_{AFE} – матрица жесткости ансамбля КЭ. Решить это частотное уравнение можно, используя метод половинного деления. Собственные векторы системы определяются методом обратных итераций.

Для решения неоднородных динамических задач используется метод модального разложения, в соответствии с которым узловые перемещения представляются в виде разложения по собственным векторам $\boldsymbol{h}_k$ задачи (15). Пусть задача (15) решена, то есть определены первые N собственных частот и соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{h}_k$, записанные в виде прямоугольной матрицы Н ($6N_{уз}\times N$). Тогда узловые перемещения в неоднородной задаче можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{q}(t) = \mathrm{H}\,\mathbf{a}(t). \tag{16}$$

Собственные формы упругой задачи обладают свойствами полноты и ортогональности:

$$\int_0^L \rho A \mathbf{Y}_m^{(C)} \cdot \mathbf{Y}_n^{(C)} dx = \begin{cases} 0\,\forall m \neq n \\ 1\,\forall m = n \end{cases}; \Rightarrow \int_0^L \mathrm{H}^T(x)\mathrm{H}(x)dx = \mathrm{I}. \tag{17}$$

Составим вариационное уравнение Лагранжа – Д'Аламбера [13]:

$$\int_0^L \left\{ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathrm{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \left[\delta\mathbf{y}^{(C)}\right]^T \mathrm{M}\ddot{\mathbf{y}}^{(C)} \right\} = 0, \tag{18}$$

где введен вектор обобщенных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{y}^{(C)}}{\partial x}, \tag{19}$$

матрица обобщенных жесткостей

$$\mathrm{E}_0 = \begin{bmatrix} E_0A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_0J_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_0J_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0J_b \end{bmatrix}, \tag{20}$$

матрица обобщенных масс

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \rho \mathrm{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho J_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Подставим в (18) разложение (16). Учитывая свойство ортогональности (18) и вытекающее из него

$$\int_0^L \left\{ \mathrm{H}^T \mathrm{E}_0 \mathrm{H} \right\} dx = diag(\omega_0^2), \tag{22}$$

получим, считая, что компоненты $\delta\boldsymbol{a}$ – независимые функции времени, систему обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей:

$$\ddot{\mathbf{a}}(t) + diag(\omega_0^2)\mathbf{a}(t) = \mathbf{R}(t). \tag{23}$$

Здесь $diag(\omega_0^2)$ – диагональная матрица, составленная из квадратов частот свободных колебаний упругой системы. Нам удобно записать решение (23) в виде:

$$\mathbf{a}(t) = \int_0^t \mathrm{W}(t-\tau)\mathbf{R}(\tau)d\tau + \mathrm{W}(t)\dot{\mathbf{a}}(0) + \dot{\mathrm{W}}(t)\mathbf{a}(0). \tag{24}$$

Здесь введена матрица весовых функций W(t), зависящая только от структуры и закреплений системы, которая в случае упругих свойств системы является диагональной и определяется следующим образом:

$$W_{nn}(t) = \frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t). \tag{25}$$

Векторы $\mathbf{a}(0)$ и $\dot{\mathbf{a}}(0)$ определяются разложением начальных условий по формам свободных колебаний, равно как и вектор **R**.

Алгоритм. При исследовании, например, запроектных воздействий используется пошаговый алгоритм, суть которого в следующем:

1. решается статическая задача о проектном состоянии системы при заданных нагрузках;

2. принимается решение о возможном разрушении одной или нескольких связей между элементами системы в некоторый момент времени t^* и модифицируется матрица жесткости ансамбля (МЖА) конечных элементов;

3. определяется спектр свободных колебаний модифицированной системы;

4. состояние системы в момент времени t^* представляется разложением по спектру модифицированного состояния, тем самым определяя начальные условия для расчета модифицированного состояния;

5. производится динамический расчет модифицированного состояния при заданных нагрузках и начальных условиях.

Заключение. Вопрос об устойчивости системы в целом решается с помощью критерия Рауса-Гурвица [14, 15] для динамических систем: если среди корней частотного уравнения есть отрицательные, то система в целом считается неустойчивой (по Ляпунову [16]) и такой вариант запроектных воздействий считается приводящим к лавинному сценарию разрушения, т.е. расчет на этом прекращается. Если же критерий Гурвица дает положительный ответ на вопрос об устойчивости системы, то упомянутый алгоритм следует повторить с п.2.

Если предположить внутреннюю перестройку структуры одного из стержней системы, то модификация МЖА выполняется заменой КЭ для идеального элемента на КЭ с несовершенствами [1, 4]; алгоритм в целом сохраняется – изменяется содержание п.2.

Помимо упомянутых в разд. **Алгоритм** запроектных воздействий следует предусмотреть потерю устойчивости некоторых стержней. Для этого в уравнение (18) следует добавить слагаемое, учитывающее работу продольных сил в стержнях на перемещениях изгиба. Технически это достигается добавлением к уравнениям состояния слагаемого, зависящего от продольной силы. При этом алгоритм исследования динамической устойчивости сохраняется, если считать начальную продольную силу в каждом стержне постоянной, определенной решением статической задачи.

Предложенный вариант расчета удобно применять при моделировании пространственных конструктивных систем каркасного типа при расчете, например, живучести зданий [17, 18, 19].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kovalchuk O.A. The rod as super-element of the subsystem // MATEC Web of Conferences. 5th International Scientific Conference “Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education”. 2016. Vol. 86. P. 6.
2. Сафронов В.С., Катембо А.Л. Расчет несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 64–74.
3. Гордон В.А., Тамразян А.Г., Савостикова Т.В. Динамические напряжения в арматурном стержне при внезапном образовании трещин // Вестник НИЦ Строительство. 2010. № 2. С. 167–176.
4. Ковальчук О.А. Моделирование пространственных стержневых систем методом конечных элементов // Строительство: наука и образование. 2012. № 1. С. 1–6.
5. Тамразян А.Г., Ковальчук О.А. Матрица влияния модели суперэлемента прямого стержня с поперечными трещинами на динамическое состояние упругих и линейно-вязкоупругих тел // Вестник НИЦ Строительство. 2011. № 3–4. С. 120–130.
6. Колчунов В.И., Яковенко И.А. Об использовании гипотезы плоских сечений в железобетоне // Строительство и реконструкция. 2011. № 6. С. 16–23.
7. Городецкий А.С. Возможности применения суперэлементов при решении различных задач строительной механики // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 6 (263). С. 51–56.
8. Огурцов Ю.Н. Реализация многоуровневого суперэлементного подхода к расчету конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 1989. № 5. С. 50–54.
9. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения Лапласа. М.: Изд. Наука, 1974. 224 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Изд. Наука, 1976. 544 с.
11. Порошина Н.И., Рябов В.М. Об обращении преобразования Лапласа некоторых специальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 3. С. 50–60.
12. Talbot A. The accurate numerical inversion of Laplace transform // J. Inst. Maths. Applics. 1979. Vol. 23. P.97–120.
13. Козлов В.В. О вариационных принципах механики // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. № 5. С. 707–717.
14. Clark R.N., The Routh-Hurwitz stability criterion, revisited // IEEE Control Systems Year. 1992. Vol. 12. P. 119 – 120.
15. Anagnost J.J., Desoer C.A., An elementary proof of the Routh-Hurwitz stability criterion // Circuits Systems and Signal Process. 1991. Vol. 10. P. 101–114.
16. Parks P.C. A new proof of the Routh-Hurwitz stability criterion using the second method of Liapunov // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1962. Vol. 58. P. 694–702.
17. Белостоцкий А. М., Каличава Д. К. Математическое моделирование как основа мониторинга зданий и сооружений // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Т. 6. № 1–2. С. 78–79.
18. Стругацкий Ю.М., Шапиро Г.И. Безопасность московских жилых зданий массовых серий при чрезвычайных ситуациях. // Промыш-

ленное и гражданское строительство. 1998. № 8. С. 37–41.

19.Тамразян А.Г., Степанов А.Ю., Парфенов С.Г. Конструктивная безопасность железобетонных конструкций зданий и сооружений при запроектных воздействиях. // Науч. тр. 2-ой Всероссийской (Международной) конференции по бетону и железобетону «Бетон и железобетон: пути развития». М.: Дипак, 2005. Т.6. С. 92–100.

Kovalchuk O.A., Leontiev A.N.

MODELING OF ROD ELEMENTS OF THE BUILDING FRAMEWORK

The basis of calculation of the building based on the principle: "one rod-element – one super-elements". Unlike the traditional approach, consisting in attributing to finite element polynomial shape functions, the essence of the concept is to use analytical solutions of problems of statics and dynamics of a straight rod, which reproduces the look of the finite-element method (FEM). The paper uses a variant of the super-elements method focused precisely on the calculation of the carrier rod framework, this is equivalent to equivalent the method of joints known from course "Technical mechanics" described, e.g., in. In fact the meaning of governing equations does not differ from the classical variants of the finite-element method or the super-elements method.

Key words: *the ensemble of finite elements, stiffness matrix, additional to the plan impact, system stability, the frequency of free vibrations of the rod system.*

Ковальчук Олег Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Адрес: Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26.
E-mail: oko44@mail.ru

Леонтьев Андрей Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Адрес: Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26.
E-mail: an_leontie@mail.ru