

DOI: 10.12737/24450

Герасимов М.Д., канд. техн. наук, доц.,  
Воробьев Н.Д., канд. техн. наук, доц.,  
Герасимов Д.М., магистрант

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХСТУПЕНЧАТОГО ВИБРАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА\*

mail\_mihail@mail.ru

При проектировании вибрационных механизмов с направленными колебаниями можно выделить две задачи проектирования: прямую и обратную. В прямой задаче по известным геометрическим параметрам и массе дебалансов определяют значение вынуждающей силы и способность её выполнять поставленную задачу. В обратной задаче величина вынуждающей силы задаётся в соответствии с технологическими целями и требуется решить задачу проектирования вибрационного механизма с рациональными параметрами. В статье приводится методика расчёта двухступенчатого вибрационного механизма и построение его математической модели с заданным соотношением величин прямого и обратного действия направленной вынуждающей силы.

**Ключевые слова:** вибратор, вибрационный механизм, характеристика работы вибрационного механизма, разрывная функция, ряд Фурье, принцип Даламбера, коэффициент динамичности вибрационного механизма.

По целому ряду технологических процессов, в которых используются механические колебания, направленные колебания предпочтительнее круговых и эллиптических [1, 2]. Но, направленные колебания, действующие вдоль некоторой прямой линии, и имеющие равные по значению силы в противоположных направлениях, по своей эффективности уступают асимметричным колебаниям, у которых сила в направлении выполняемой работы существенно больше силы, в направлении холостого хода [3–5]. Простейший вибрационный механизм с асимметричной вынуждающей силой может быть представлен двумя вариантами. В первом случае, в схеме установки присутствуют две ступени спаренных вибраторов. В каждой ступени установлены два вибратора с круговыми колебаниями. Каждая ступень генерируют направленную вынуждающую силу. При сложении колебаний спаренных вибраторов каждой ступени могут быть получены асимметричные колебания при соответствующем подборе исходных геометрических параметров дебалансов, их массы и частоты вращения [6–8].

Второй способ получения асимметричных колебаний может быть получен из двух ступеней вибраторов планетарного типа с направленными колебаниями [9,10].

**Методика.** В работе использованы аналитические методы исследования, основанные на разложении функции, описывающей механические колебания, с помощью ряда Фурье и принципа Даламбера [11,12,13]. Кроме этого, использованы методы математического моделирования и программирования при решении конкретных примеров.

**Основная часть.** На рынке промышленного и технологического оборудования всегда имеется спрос на вибраторы, вибрационные устройства и вибрационные механизмы, генерирующие направленные механические колебания.

Отечественной и зарубежной промышленностью выпускается ряд спаренных однорядных дебалансных вибрационных механизмов [2].

Типичным представителем спаренных дебалансных вибрационных механизмов является вибратор (рис. 2): «Направленный возбудитель DF» виброгрохотов LinaClass SLB/SLC, который представляет собой виброредуктор или вибросинхронизатор.

Вибратор подобной конструкции может устанавливаться как на горизонтальной, так и на вертикальной поверхности, создавая колебания в вертикальной или в горизонтальной плоскости.

Особый интерес, с точки зрения технологических возможностей, представляет собой задача исследования спаренного двухрядного вибрационного механизма (вибратора). Такая конструкция позволяет существенно расширить технологические возможности машины в целом. Такая конструкция позволяет получить не только направленные колебания, но и колебания с асимметрией величины суммарной вынуждающей силы в противоположных направлениях. В этом случае можно рассматривать «рабочее» направление действия вынуждающей силы и «холостое» направление действия вынуждающей силы.

Будем считать, что спаренными вибраторами являются вибраторы, расположенные в одной плоскости, и они образуют единый модуль

направленных колебаний. Если над одним модулем расположен второй модуль из спаренных вибраторов, такой механизм можно называть двухмодульный или двухрядный спаренный вибрационный механизм. Теоретически, параметры двухмодульного или двухрядного спа-

ренного вибрационного механизма можно рассматривать на вибраторах одной вертикали (ветви), состоящей из двух ступеней, учитывая, что в горизонтальной плоскости силовое действие обеих ветвей взаимно компенсируются.

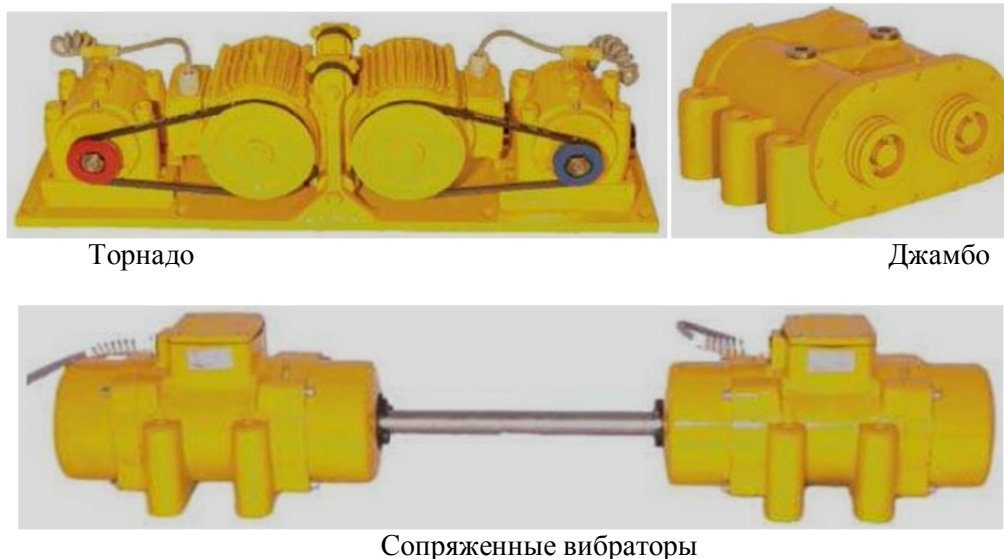


Рис. 1. Конструкции спаренных дебалансных вибрационных механизмов.

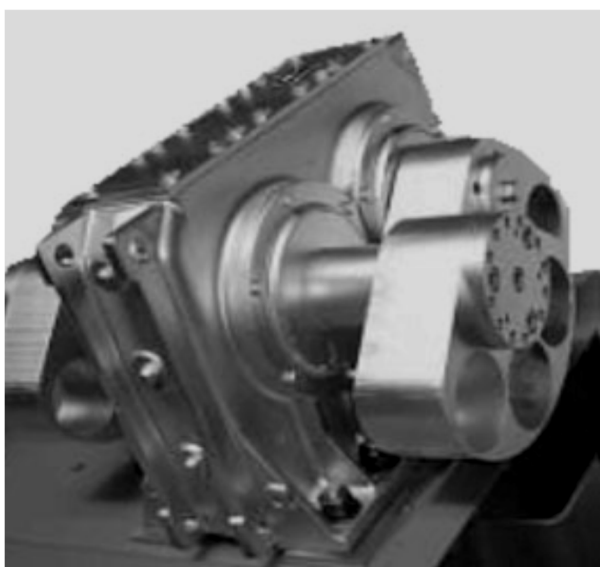


Рис. 2. «Направленный возбудитель DF» виброгрохотов LinaClass SLB/SLC

Рассматривается вибрационный механизм, состоящий из двух спаренных вибраторов (рис. 3), вертикально соединенных в виде одной ветви. На рисунке 3 имеем:

- $R_1, R_2$  – радиусы направляющих окружностей;
- $m_1, m_2$  – массы дисбалансов;
- $\omega_1, \omega_2$  – угловые скорости вращения дисбалансов;

–  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$  – начальные углы отклонений дисбалансов.

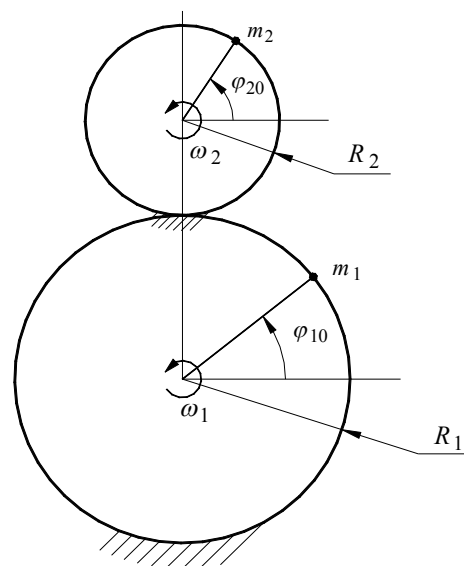


Рис. 3. Схема вертикального расположения дебалансных вибраторов

Требуемые характеристики работы вибрационного механизма обычно задаются в виде разрывной функции  $F(t)$ .

На рисунке (рис. 4, а):  $F_{\text{погр}}$  – сила погружения,  $F_{\text{под}}$  – сила подъема,  $t_1$  – время действия силы погружения,  $t_2$  – время действия силы подъема.

Учитывая, что работа вибрационного механизма имеет периодический характер, функцию  $F(t)$  разлагают в ряд Фурье. Для получения в дальнейшем более простых формул функцию  $F(t)$  представим в виде функции  $\tilde{Y}(t)$  (рис. 4, б). В отличие от функции  $F(t)$  функция  $\tilde{Y}(t)$  является четной, вследствие чего ряд Фурье, порожденный функцией  $\tilde{Y}(t)$ , запишется в следующем виде, если ограничиться первыми тремя слагаемыми ряда [14]:

$$Y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^2 a_k \cos k\omega_0 t, \quad (1)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1+t_2}{2}} \tilde{Y}(\tau) \cos k\omega_0 \tau d\tau, \quad (2)$$

$$T = t_1 + t_2, \quad (3)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

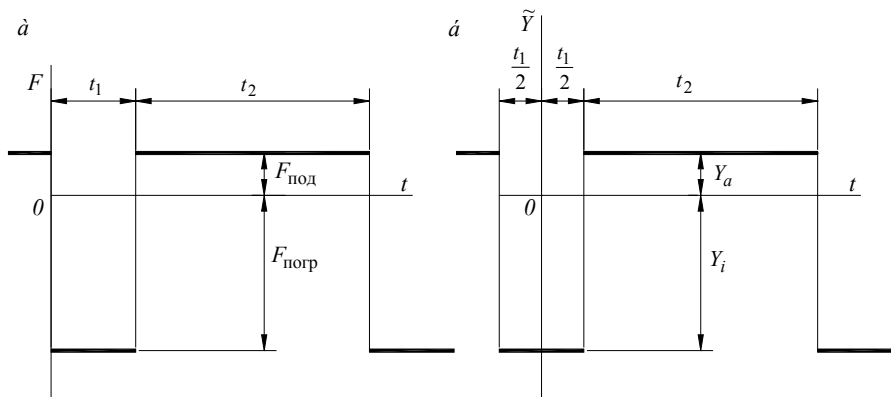


Рис. 4. Схема рабочего цикла вибратора с наличием асимметрии вынуждающей силы

Вычисляя интегралы (2), получим:

$$a_0 = \frac{2}{T} (Y_i t_1 + Y_a t_2), \quad (5)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi k} \left( Y_i \sin k\omega_0 \frac{t_1}{2} + (-1)^k Y_a \sin k\omega_0 \frac{t_2}{2} \right), k = 1, 2.$$

Введем силы инерции  $\bar{R}_1^H$  и  $\bar{R}_2^H$ , приложенные к дисбалансам, и составляющие реакции опоры  $\bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$  (рис. 5). Пренебрегая весом направляющих окружностей и дисбалансов ввиду их малости в сравнении с силами инерции (при достаточно больших значениях угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ), на основании принципа Даламбера получим следующие уравнения равновесия [15]:

$$\begin{aligned} X_O + R_1^H \cos \varphi_1 + R_2^H \cos \varphi_2 &= 0, \\ Y_O + R_1^H \sin \varphi_1 + R_2^H \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$R_i^H = m_i \omega_i^2 R_i, \varphi_i = \varphi_{i0} + \omega_i t. \quad (7)$$

Из второго уравнения (6) находим вертикальную реакцию опоры (из первого уравнения может быть определена горизонтальная составляющая реакции опоры):

$$Y_O = -R_1^H \sin \varphi_1 - R_2^H \sin \varphi_2. \quad (8)$$

Для равенства функций  $Y(t)$  и  $Y_O(t)$  необходимо, прежде всего, равенство нулю коэффициента  $a_0$ , из которого следует

$$t_1 = \frac{Y_a}{Y_a - Y_i} T, t_2 = T - t_1. \quad (9)$$

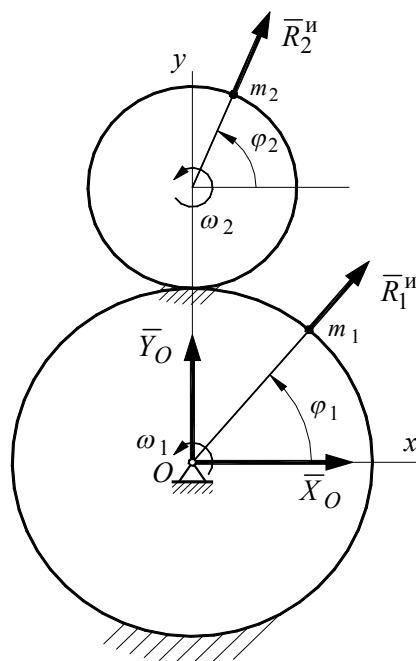


Рис. 5. Схема действующих сил

Для дальнейшего сравнения функций  $Y(t)$  и  $Y_O(t)$  в функции  $Y(t)$  (формула (1),  $\cos k\omega_0 t$  заменим на  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\omega_0 t\right)$ . Приравнявая аргументы и коэффициенты при функциях синусов, получим окончательные условия совпадения функций  $Y(t)$  и  $Y_O(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \frac{\pi}{2}, \varphi_{20} = \frac{\pi}{2}, \\ \omega_1 &= \omega_0, \omega_2 = 2\omega_0, \\ m_1 R_1 &= -\frac{a_1}{\omega_0^2}, \\ m_2 R_2 &= -\frac{a_2}{4\omega_0^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, задав значения только трех параметров:  $\omega_1$ ,  $Y_a$  и  $Y_i$ , можно определить все остальные параметры вибрационного механизма:  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\omega_2$ , за исключением:  $m_1, R_1, m_2, R_2$ , значения, которых должны удовлетворять только двум последним условиям (10).

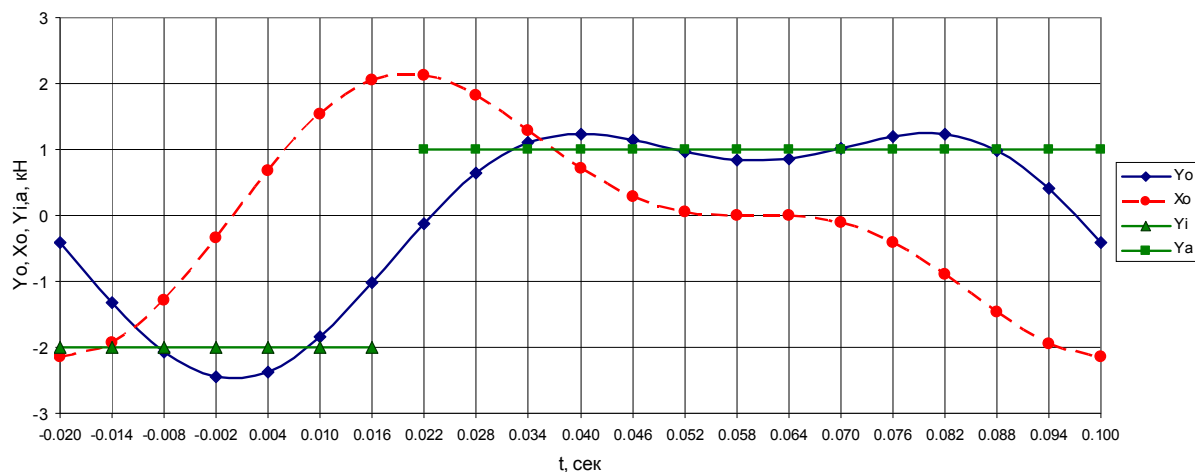


Рис. 6. Пример результата расчёта осевых составляющих вынуждающей силы в пределах одного периода.

Моменты времени, в которые функция  $Y_O(t)$  принимает экстремальные значения, определяются из условия

$$\frac{\partial Y_O}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

для функции (8) оно может быть записано в следующем виде:

$$m_1 \omega_1^3 R_1 \cos(\varphi_{10} + \omega_1 t) + m_2 \omega_2^3 R_2 \cos(\varphi_{20} + \omega_2 t) = 0. \tag{14}$$

Численным решением уравнения (14) были определены четыре значения момента времени, в которых функция принимает экстремальные значения.

Абсолютный минимум достигается при  $t = 0$ , при этом  $Y_{Oi} = -2,48$  кН, локальные мак-

симумы достигаются при  $t = 0,04$  с и  $t = 0,08$  с и оба равны, так что  $Y_{Oa} = 1,24$  кН.

Таким образом, коэффициент динамичности вибратора составляет

$$K = \frac{2,48}{1,24} = 2. \tag{15}$$

Для исследования влияния отдельных параметров механизма на величины сил погружения и подъема, а также коэффициента динамичности, были выполнены расчеты, при которых параметры одного вибратора оставались неизменными (с индексом "1"), а параметры второго вибратора (с индексом "2") варьировались. Результаты расчетов представлены на рис. 7–10.

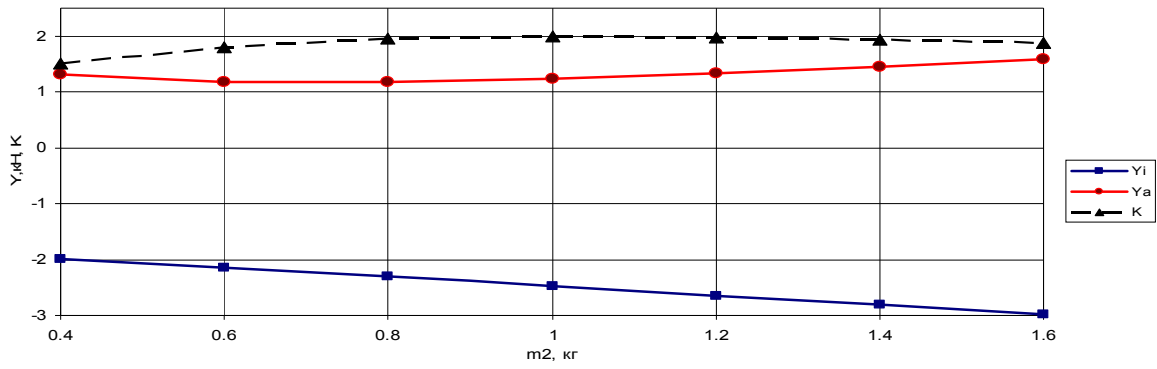


Рис. 7

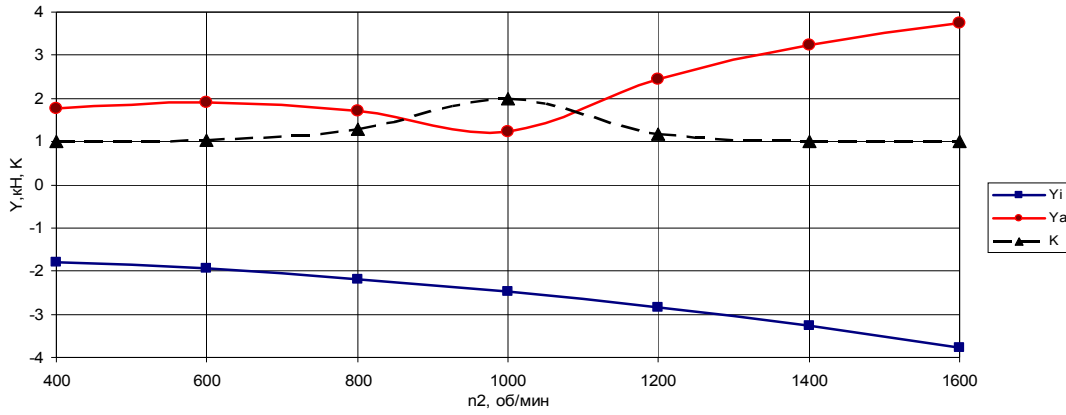


Рис. 8

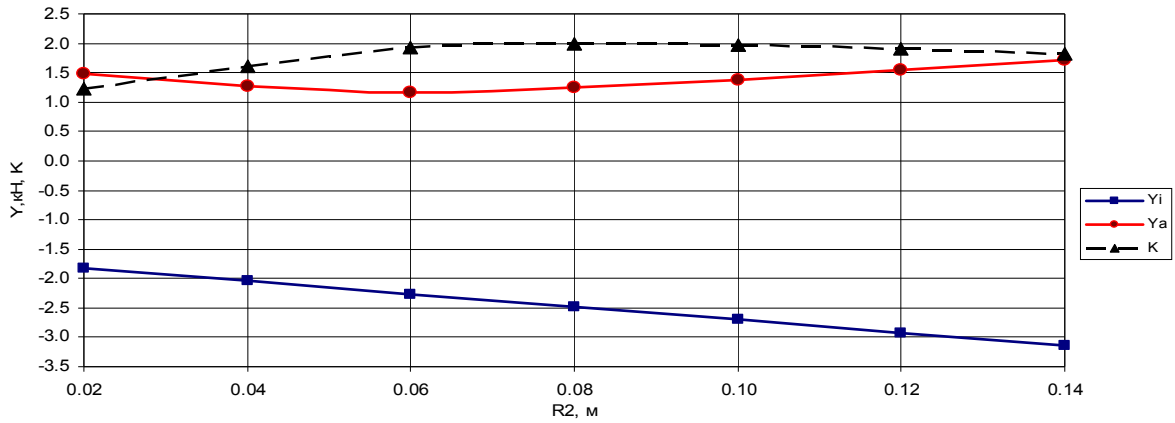


Рис. 9

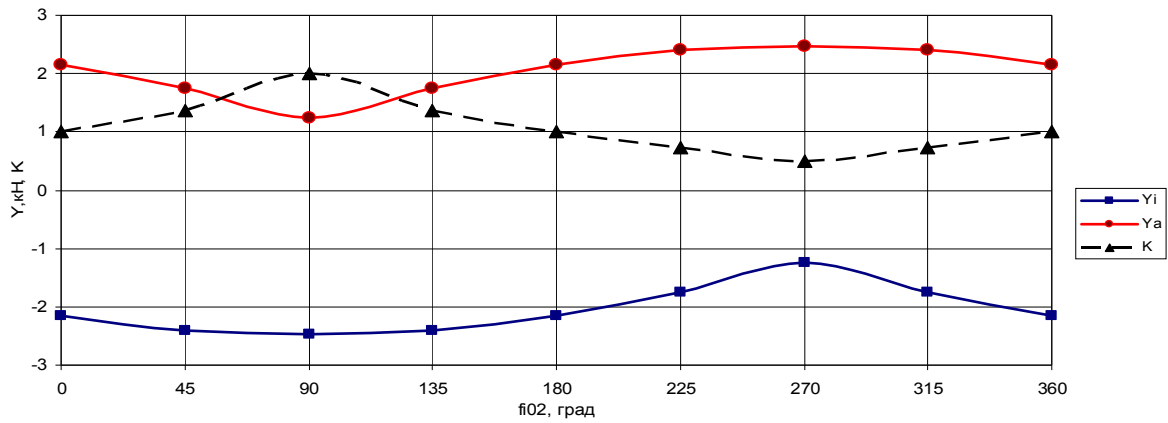


Рис. 10

Таким образом, получена математическая модель спаренного дебалансного вибрационного механизма, состоящего из двух вибраторов с круговыми колебаниями и установленными друг над другом. Причём, вибраторы имеют кратную частоту вращения дебалансных валов, разные массы дебалансов, произвольные начальные фазы и разные радиусы вращения неуравновешенных масс.

*\*Статья выполнена при поддержке гранта по программе РФФИ №14-41 08043 от 25-11-2014 г «Разработка теоретических основ проектирования вибрационных модулей для технологических процессов сортировки, измельчения, уплотнения и погружения свай в грунт»*

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жулай В.А. Машины для свайных работ. Конструкции и расчеты: учеб. пособие, Воронеж. гос. арх.-строит. ун-т.- Воронеж, 2011. 216с
2. Герасимов М.Д. Способ получения направленных механических колебаний для практического применения в технологических процессах // Строительные и дорожные машины. 2014. №1. С. 35-38
3. Герасимов М.Д., Алиматов Б.А., Герасимов Д.М., Чеботарев О.И. Направление совершенствования вибраторов направленного действия // Научно-технический журнал Фер.ПИИ. 2013. №3. С. 23–26.
4. Gerasimov M.D., Glagolev S.N., Gerasimov D. M., Mkrtychev O. V. Determination Of The Driving Force's Asymmetry Factor And The Vibrostand's Work's Analysis // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. Т. 10. №24. P. 45181-45185.
5. Герасимов М.Д. Инновационные вибрационные технологии, машины и оборудованием. Опыт НИОКР // «Мир дорог». С.-Пб. Специальный выпуск 2015-2016. С. 31-32.
6. Gerasimov M.D., Mkrtychev O.V., Stepanistchev V.A., Sevost'yanov V.S. Calculation of Main Kinematic Characteristics of the Single-Shaft Vibrator with Aimed Fluctuations // Research Journal of Applied Sciences. 2014. №9 С.855–861.
7. Герасимов М.Д. Сложение колебаний в вибровозбудителях// Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2016. №3. С.116–121.
8. Герасимов М.Д., Герасимов Д.М., Степанищев В.А. Методика проведения исследований вибрационного устройства с асимметричной вынуждающей силой// Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова, 2016. №9. С.125-130.
9. Пат. 145754 Российская Федерация. МПК 7 / Герасимов М.Д., Степанищев В.А., Апанасов А.А. Зубчато-планетарный вибровозбудитель / заявитель и патентообладатель БГТУ им. В.Г. Шухова. № Оpubл. 27.09.2014
10. Степанищев В.А. Способ получения асимметричных механических колебаний направленного действия. [Электронный ресурс]. Материалы Международного научного форума «ЛОМОНОСОВ 2013» Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова.– М.; МАКС Пресс, 2013. – 1 электр. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – Систем. Требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader.
11. Герасимов М.Д. Исследование планетарных вибраторов с направленными вынужденными колебаниями/ Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. Ст.: в 2 ч. Ч.1/ редкол.: С.Ф. Яцун (отв. Ред.) [и др.]; Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2014. 384 с., С. 91-100
12. Герасимов М.Д., Герасимов Д.М. Определение закона движения, скорости и ускорения центра масс планетарного вибровозбудителя / Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. №12. С. 8 – 11.
13. Герасимов М.Д., Мкртычев О.В. Степанищев В.А. Расчёт системы одновалных вибраторов с помощью рядов Фурье/ Научно-технологические инновации: сб. докладов Юбилейной Междунар. науч.-практ. конф., посвящённой 60-летию БГТУ им. В.Г. Шухова. Белгород: Изд-во БГТУ, 2014. Ч.4. 308 с. С. 29–34.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы. 6-е изд., стер. СПб.: Лань, 2003. 832 с.
15. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов 12-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2002. 416 с.

### **Gerasimov M.D., Vorobiyov N.D., Gerasimov D.M. MATHEMATICAL MODEL TWO-STAGE MECHANISM VIBRATING**

*When designing the of vibrating mechanism with directional vibrations of can identify two designing of tasks: forward and reverse. In the direct task of by the known geometric parameters and mass of unbalances determine the value of the exciting force and her ability to perform the task. In inverse problem of the magnitude the exciting force is set in accordance with the technological objectives and require to solve the problem designing of the vibratory mechanism with rational parameters. The article provides a method of calcu-*

*lating the two-stage the vibratory mechanism and building its mathematical model at a predetermined ratio the quantities of forward and reverse actions directional driving force.*

**Key words:** *vibrator, vibrating mechanism, characteristics of the vibration mechanism of discontinuous function, Fourier series, d'Alembert principle, the dynamic coefficient of the vibratory mechanism.*

---

**Герасимов Михаил Дмитриевич**, кандидат технических наук, доцент.  
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.  
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.  
E-mail: mail\_mihail@mail.ru

**Воробьёв Николай Дмитриевич**, кандидат технических наук, доцент..  
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.  
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.

**Герасимов Дмитрий Михайлович**, магистрант.  
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.  
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.  
E-mail: mail\_mihail@mail.ru