DOI: 10.12737/25053

[1]Хуссейн С., PhD,
[2]Али Ф., PhD,
[1]Хуссейн З., PhD,
[3]Рехман Н., PhD,
[4]Зуев С.В., канд. физ.-мат. наук, доц.,
[4]

[1]Университет COMSATS, Абботабад, Пакистан
[2]Колледж NAMAL, Мианвали, Пакистан
[3]Открытый Университет Аллама Икбаль, Исламабад, Пакистан
[4]

ЭВОЛЮЦИЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА С ВЫПЛАТОЙ ДИВИДЕНДОВ В МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ СО СКАЧКАМИ*

tausef775650@yahoo.co.in, sergey.zuev@bk.ru

Настоящая работа посвящена анализу и изменениям функции цены (премии) американского опциона на акции с выплатой дивиденда, построенной по модели диффузии со скачками. Получен и исследован эквивалентный вид функции. Кроме того, исследуются вариационные неравенства, удовлетворяющие этой функции. Полученные результаты могут быть использованы для нахождения оптимальной стратегии хеджирования и определения оптимальных границ торговли связанными оп-

Ключевые слова: *американский опцион, модель диффузии со скачками, пуассоновский процесс, локальная слабые производные.*

Введение. Вопросы оценки цены американских опционов и корпоративных обязательств существенно развивались с момента появления классической работы Ф. Блэка и М. Шоулса [1]. Было предложено множество функций для расчета цены европейского опциона (см., например [1], [3], [11], [13] и ссылки в них), тогда как американский опцион в этом смысле до сих пор открыт для исследований, что вызвало большое количество работ как по численным, так и по аналитическим методам.

В статье [9] задача американского опциона решается должным образом, используя системы вариационных неравенств, а также исследуется численными методами на основе методов конечных элементов и разностных производных. В [9] предложено решать задачу цены американского опциона с помощью решения системы вариационных неравенств, эквивалентность которой исходной задаче установлена посредством некоторых необходимых условий. В [9] авторы полагаются на взаимосвязь между вариационным неравенством и оптимумом момента оста- в теории американского опциона.

В работе [14] исследована функция цены американского пут опциона в модели диффузии со скачками. Построена взаимосвязь между задачей и смешанной краевой задачей для параболического интегро-дифференциального уравнения. В нашей статье рассматривается американский опцион и, кроме того, мы используем чисто вероятностный подход для представления результатов.

В статье [21] решается система вариационных неравенств и исследуется американский пут опцион посредством некоторых взвешенных пространств Соболева. В работе [6] широко используются свойства регулярности американского пут опциона для получения ошибки хеджирования в случае рассмотрения опциона в дискретном времени. Эти результаты развиваются в [7] на случай опционов пут и колл на ак- без выплаты дивидендов. Некоторые дополнительные свойства американского опциона можно обнаружить в работе [16], где рассматривалось влияние валютного курса. В [8] опубликованы результаты исследований регулярности функции цены американского пут опциона в модели диффузии со скачками. Для более детального рассмотрения свойств функции цены американского опциона можно адресовать читателя к работам [4], [2], [3], [11], [12], [5] и [19]. В книге [20] рассматриваются модели скачков, которые стали привлекать особое внимание в последние годы.

В литературе показано, что американский колл опцион случае отсутствия выплаты соответствующему европейскому колл опциону (см., например, [18], с. 111). По нашим сведениям, никем не исследована функция цены американского опциона (как пут, так и колл опционы) на акции, курс которых, как и выплаты дивидендов случайные скачки. Заметим, что наличие дивидендов будет генерировать отличие между американским и европейским опционами. Мы рассмотрим акции с выплатой дивидендов которых испытывает резкие колебания в силу каких-то неопределенных факторов, и исследуем вариации функции цены американского опциона. Будем считать процентную ставку и волатильность детерминированными липшицевыми функциями времени, а функцию выплат – произвольной ограниченной снизу выпуклой функцией. Используем чисто вероятностный подход для того, чтобы получить строгую оценку слабых производных первого и второго порядков от функции цены американского опциона. Результаты могут быть использованы для исследования равномерных приближений к оптимальной стратегии хеджирования, свойств регулярности оптимальных границ торговли для указанного типа опционов (примеры подобных свойств регулярности рассмотрены в [6], [7] для изучения ошибок хеджирования в дискретном времени для американского опциона, а также в [15] для анализа оптимальных границ торговли пут опционом американского типа).

Ниже мы приводим основную формулировку нашей модели и обозначаем некоторые предварительные результаты. Далее с помощью системы вариационных неравенств исследуются вариационные свойства и свойства регулярности функции цены американского опциона. В заключении приводятся результаты и библиографические ссылки.

Формулировка и предварительные результаты. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, на котором определим стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{0\le t\le T}$, пуассоновский процесс $N = (N_t)_{0\le t\le T}$ с интенсивностью λ и последовательность $(U_i)_{i\ge 1}$ независимых равномерно распределенных случайных величин на интервале $(-1, \infty)$ с конечными моментами. Положим, что временной горизонт T конечен, и σ -алгебры, генерируемые, соответственно, посредством B, N и $(U_i)_{i\ge 1}$, являются независимыми. Обозначим через $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ P-дополнение естественной фильтрации величин (B_t), (N_t) и $(U_i)_{i\le N_t}$, где, как и ранее, $i \ge 1$ и $0 \le t \le T$.

На фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)_{0\le t\le T}$ рассмотрим финансовый рынок с двумя активами: денежной единицей с M_t в момент t и акциями с вы- значением цены S_t на момент t. Цены акций будем считать испытывающими скачки, пропорциональные U_i, в случайные моменты $\mathcal{T}_i, i = 1,2,\ldots$, которые соответствуют моментам скачков в пуассоновском процессе.

Активы M_t и S_t удовлетворяют следующим обыкновенному и стохастическому дифференциальным уравнениям, соответственно (см. [12]):

$$dM_t = r(t)M_t dt, \qquad M_0 = 1, \qquad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$dS_t = S_{t-}\left((b(t) - \delta(t))dt + \sigma(t)dB_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} U_i\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

где S_{t-} является точной нижней гранью множества $\{S_t\}$, и мы предполагаем, что $b(t)$ есть определенный $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс, $r(t)$ – детерминированная процентная ставка (зависящая от времени), $\delta(t)$ – размер дивиденда, $\sigma(t)$ – волатильность далее, что функции $b(t), r(t), \delta(t), \sigma(t)$ есть непрерывно дифференцируемые функции времени, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\begin{gathered}0 \le r(t) \le \bar{r}, 0 \le \delta(t) \le \bar{\delta}, 0 < \underline{\sigma} \le \sigma(t) \le \bar{\sigma}, |b(t)| \le \bar{r},\\ |r(t) - r(s)| + |\delta(t) - \delta(s)| + |\sigma(t) - \sigma(s)| \le k|t - s|,\end{gathered} \tag{3}$$

где $s, t \in [0, T]$ и $\bar{r}, \bar{\delta}, \underline{\sigma}, \bar{\sigma}, k$ есть некоторые положительные константы.

Решение стохастического дифференциального уравнения (2) имеет вид (см. [20]):

$$S_t = S_0\left(\prod_{i=1}^{N_t}(1 + U_i)\right)\exp\left[\int_0^t \left(b(u) - \delta(u) - \frac{\sigma^2(u)}{2}\right)du + \int_0^t \sigma(u)dB_u\right], S_0 > 0.$$

В [12] показано, что дисконтированная цена акций $\tilde{S}_t = e^{-\int_0^t r(u)du} S_t$ является мартингалом, если и только если выполнено условие

$$\int_0^t b(u)du = \int_0^t \left(r(u) + \delta(u) - \lambda E(U_1)\right)d \quad (4)$$

В этой краткой статье мы анализируем функцию американского опциона с произвольной неотрицательной выпуклой функцией выплат $g(x)$, $x \geq 0$, удовлетворяющей соотношению

$$|g'(x \pm)| \leq c \text{ для всех } x > 0, \quad (5)$$

где $g'(x \pm)$ есть правая/левая производная от $g(x)$ и c – определенная положительная постоянная.

Положим без ограничения общности, что $g(0) = g(0+)$ примеры этого семейства функций – опционы, как колл, так и пут, с выплатами $g(x) = (x - L)^+$ и $g(x) = (L - x)^+$, соответственно, где L – цена

Далее мы представим некоторые предварительные и важные для лучшего понимания результаты, а также обозначим наши основные выводы.

В первую очередь, важно напомнить, что функция $V(t,x), x \geq 0, 0 \leq t \leq T$, цены американского опциона может быть рассмотрена как функция, характеризующая соответствующую задачу оптимальной остановки (см., например, раздел 2.5 в [11]). В частности,

$$V(t,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{T}_{t,T}} E\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(v)dv\right) g(S_\tau(t,x))\right], x > 0, 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где множество $\mathfrak{T}_{t,T}$ есть множество всех моментов остановок таких, что $\tau \leq t \leq T$, и стохастический процесс $S_u(t,x), \tau \leq t \leq T$, удовлетворяет уравнению (2), то есть

$$dS_u = S_{u^-}\left((b(u) - \delta(u))du + \sigma(u)dB_u + d\left(\sum_{i=1}^{N_u} U_i\right)\right), \quad 0 \leq u \leq T \quad (7)$$

с начальным условием $S_t(t,x) = x, x > 0.$

Единственное сильное решение (7) представляется в виде $(S_u(t,x), \mathcal{F}_u)_{t \leq u \leq T}$, где

$$S_u(t,x) = x\left(\prod_{i=N_t+1}^{N_u}(1 + U_i)\right)\exp\left[\int_t^u\left(b(v) - \delta(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv + \int_t^u \sigma(v)dB_v\right].$$

Условие (4) приводит это решение к виду

$$S_u(t,x) = x\exp\left[\int_t^u\left(r(v) - \lambda E(U_1) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv + \int_t^u \sigma(v)\,dB_v + \sum_{i=N_t+1}^{N_u}\ln(1 + U_i)\right].$$

Введем новый стохастический процесс $(X_u(t,y), \mathcal{F}_u)_{t \leq u \leq T}$, такой что

$$X_u(t,y) = y + \int_t^u\left(r(v) - \lambda E(U_1) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv + \int_t^u \sigma(v)\,dB_v + \sum_{i=N_t+1}^{N_u}\ln(1 + U_i),$$

где $-\infty < y < \infty$, $t \leq u \leq T$, $U_i \in (-1, \infty)$, $i = 1,2,\ldots$

Предложение 1. *Очевидно, что*

$$S_u(t,x) = exp[X_u(t, \ln x)], t \leq u \leq T, x > 0, \quad (8)$$

и для произвольного момента τ, $t \leq \tau \leq T$, *имеем*

$$g(S_\tau(t,x)) = \psi(X_\tau(t, \ln x)), \quad (9)$$

где $\psi(y) = g(e^y)$, $-\infty < y < \infty$, *есть новая функция выплат.*

Ясно, что соответствующая задача оптимального времени прямо выводится подстановкой (8) в (6) с получением

$$U(t,y)=\sup_{\tau\in\mathfrak{T}_{t,T}} E\left[\exp\left(-\int_t^{\tau} r(v)dv\right)\psi\big(X_\tau(t,y)\big)\right], \tag{10}$$

с $0\le t\le T$ и $-\infty<y<\infty$. Из (6) и (9) получаем соотношение

$$V(t,x)=U(t,\ln x), x>0, 0\le t\le T \tag{11}$$

Используем масштабную инвариантность броуновского движения и преобразуем функцию $U(t,y)$ следующим образом (см. [10]):

$$U(t,y)=\sup_{\tau\in\mathfrak{T}_{0,1}} E\left[e^{-\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv}\psi\left(y+\int_t^{t+\tau(T-t)}\left(r(v)-\lambda E(U_1)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.+\int_0^{\tau}\sqrt{T-t}\,\sigma(t+v(T-t))dB_v+\sum_{i=1}^{N_{t+\tau(T-t)}}\ln(1+U_i)\right)\right], \tag{12}$$

где $\mathfrak{T}_{0,1}$ представляет собой множество всех τ с учетом фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}$, принимающей значения в интервале $[0,1]$.

Приходим к следующему результату.

Лемма 2. *Пусть* $g(x), x>0$, *есть неотрицательная конечная выпуклая функция, удовлетворяющая* (5), *тогда новая функция выплат* $\psi(y), -\infty<y<\infty$, *является локально липшицевой, то есть,*

$$|\psi(y_2)-\psi(y_1)|\le ce^{|y_1|+|y_2|}|y_2-y_1|, -\infty<y_1,y_2<\infty. \tag{13}$$

Доказательство. Так как $g(x)$ выпукла, то она локально равномерно непрерывна (см. [17]). Поэтому можем записать

$$g(y)-g(x)=\int_x^y g'(v\pm)\,dv, 0<x\le y<\infty \tag{14}$$

Комбинируя (5), (9) и (14) и используя теорему о среднем значении, получаем

$|\psi(y_2)-\psi(y_1)|=|g(e^{y_2})-g(e^{y_1})|\le ce^{|y_2|+|y_1|}|y_2-y_1|$.

□

Теперь можно записать

$\psi(y)=g(e^y)-g(e^0)+g(1)\le c(e^y+1)$ - где использовано (5) и (14). Далее в этой части нам понадобится следующая оценка:

$$E\psi(X_\tau(t,y))\le cE\left(e^{x+\int_t^{t+\tau(T-t)}\left(r(v)-\lambda E(U_1)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv+\int_0^{\tau}\sqrt{T-t}\,\sigma(t+v(T-t))dB_v+\sum_{i=1}^{N_{t+\tau(T-t)}}\ln(1+U_i)}\right. \\ +g(1)\le c\left(e^{x+(2\bar{r}+3\lambda E(U_1))T}+1\right)+g(1). \tag{15}$$

Теперь мы готовы перейти к следующему предварительному результату.

Теорема 3. *Функция* $U(t,y), 0\le t\le T, -\infty<y<\infty$, *задачи* (10) *оптимальной остановки является локально липшицевой по переменным* y *и* t, *то есть*

$$|U(t,x)-U(t,y)|\le Ae^{|x|+|y|}|x-y|, x,y\in\mathbb{R}, 0\le t\le T, \tag{16}$$

$$|U(t,y)-U(s,y)|\le\frac{Be^{2|y|}}{\sqrt{T-t}}|t-s|, 0\le s\le t<T, \tag{17}$$

где A *и* B *есть определенные неотрицательные постоянные, зависящие от* $\bar{r},\bar{\sigma},c,\lambda,k,g(1),E(1+U_1)^2,E(1+U_1)^{-2}$ *и* T.

Доказательство. Для любого фиксированного τ из множества $\mathfrak{T}_{t,T}$ и $x,y\in\mathbb{R}$, по Лемме 2 можем записать

$$\left|E\exp\left(-\int_t^{\tau} r(v)dv\right)\psi\big(X_\tau(t,x)\big)-E\exp\left(-\int_t^{\tau} r(v)dv\right)\psi\big(X_\tau(t,y)\big)\right| \\ \le E\left[e^{|X_\tau(t,x)|+|X_\tau(t,y)|}|X_\tau(t,x)-X_\tau(t,y)|\right]\le Ae^{|x|+|y|}|x-y|.$$

Отсюда, в силу свойства верхней грани (разность верхних граней меньше либо равна верхней грани разности), получаем (16).

Обратимся теперь к (17). Зафиксируем $\tau \in \mathfrak{T}_{0,1}$ и, используя (12), запишем

$$\begin{aligned}
&\left|Ee^{-\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv}\psi(X_\tau(t,y)) - Ee^{-\int_s^{s+\tau(T-s)} r(v)dv}\psi(X_\tau(s,y))\right| \le \\
&E\Big[\Big|e^{-\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv} - e^{-\int_s^{s+\tau(T-s)} r(v)dv}\Big|\psi(X_\tau(s,y)) \\
&+ e^{-\int_s^{s+\tau(T-s)} r(v)dv}\left|\psi(X_\tau(t,y)) - \psi(X_\tau(s,y))\right|\Big] \\
&\le E\Big[\Big(c\big(e^{y+(2\bar{r}+2\lambda E(U_1))T}+1\big)+g(1)\Big)\Big|e^{-\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv} - e^{-\int_s^{s+\tau(T-s)} r(v)dv}\Big|\Big] \\
&+ e^{2|y|+2(\bar{r}+\lambda E(U_1))T}\left(e^{\lambda E(U_1)T} + e^{\left(\bar{\sigma}^2 - E\left(\frac{\lambda U_1}{1+U_1}\right)\right)T}\right)^2 \\
&\times\Bigg[\Bigg|\int_t^{t+\tau(T-t)}\left(r(v)-\lambda E(U_1)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv \\
&- \int_s^{s+\tau(T-s)}\left(r(v)-\lambda E(U_1)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\Bigg| \\
&+ \left|\int_0^\tau\left(\sqrt{T-t}\,\sigma(t+v(T-t)) - \sqrt{T-s}\,\sigma(s+v(T-s))\right)dB_v\right| \\
&+ \sum_{i=N_{s+\tau(T-s)}+1}^{N_{t+\tau(T-t)}} \ln(1+U_i)\Bigg],
\end{aligned} \tag{18}$$

где использовано ограничение (15).

Используя теорему о среднем значении, получим

$$\left|e^{-\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv} - e^{-\int_s^{s+\tau(T-s)} r(v)dv}\right| \le \left|\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv - -\int_s^{s+\tau(T-s)} r(v)dv\right| \le 2\bar{r}|t\cdot \tag{19}$$

,

и подобным же образом

$$\begin{aligned}
&\left|\int_t^{t+\tau(T-t)}\left(r(v)-\lambda E(U_1)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv - \int_s^{s+\tau(T-s)}\left(r(v)-\lambda E(U_1)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right| \\
&\le 2\left(\bar{r}+\lambda E(U_1)+\frac{\bar{\sigma}^2(v)}{2}\right)|t-s|.
\end{aligned} \tag{20}$$

Более того, для фиксированного τ, $0 \le \tau \le 1$ и $0 \le s \le t < 1$, согласно (3), имеем

$$\begin{aligned}
&E\left|\int_0^\tau\left(\sqrt{T-t}\,\sigma(t+v(T-t)) - \sqrt{T-s}\,\sigma(s+v(T-s))\right)dB_v\right|^2 \\
&\le E\int_0^\tau\left(\sqrt{T-t}\,\sigma(t+v(T-t)) - \sqrt{T-s}\,\sigma(s+v(T-s))\right)^2 dv \\
&\le 2T\int_0^1\left(\sigma(t+v(T-t)) - \sigma(s+v(T-s))\right)^2 dv \\
&+ 2\int_0^1\left(\sqrt{T-t}-\sqrt{T-s}\right)^2\sigma^2(t+v(T-t))dv.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$E\left|\int_0^\tau\left(\sqrt{T-t}\sigma(t+v(T-t))-\sqrt{T-s}\sigma(s+v(T-s))\right)dB_v\right|^2\leq\frac{2k^2T^2+\bar{\sigma}^2}{T-t}(t-s)\quad(21)$$

Более того, поскольку $(U_i)_{i\geq 1}$ является последовательностью независимых равномерно распределенных интегрируемых случайных величин и N_t – пуассоновский процесс, можем записать

$$E\left|\sum_{i=N_{s+\tau(T-s)}+1}^{N_{t+\tau(T-t)}}\ln(1+U_i)\right|\leq E\sum_{i=N_{s+\tau(T-s)}+1}^{N_{t+\tau(T-t)}}|\ln(1+U_i)|=E\sum_{i=1}^{N_{(t-s)(s-\tau)}}|\ln(1+U_i)|.$$

Поскольку N_t есть возрастающая функция времени и $\tau\leq 1$, получаем

$$E\left|\sum_{i=N_{s+\tau(T-s)}+1}^{N_{t+\tau(T-t)}}\ln(1+U_i)\right|\leq E\sum_{i=1}^{N_{t-s}}|\ln(1+U_i)|=\lambda E|\ln(1+U_i)|(t-s).\quad(22)$$

Подставляя (19)–(22) в (18) и принимая во внимание то же самое свойство верхней грани, что было использовано выше, завершаем доказательство. □

В следующей части перейдем к основным результатам статьи.

Вариационные неравенства. Пусть $\tilde{S}_t=e^{-\int_0^t r(u)du}S_t$ есть дисконтированная цена акций. Тогда дисконтированная функция цены опциона будет иметь вид

$$\tilde{V}(t,x)=e^{-\int_0^t r(u)du}V\left(t,xe^{\int_0^t r(u)du}\right),0\leq t\leq T,x>0.\quad(23)$$

Эта функция имеет класс C^2 на множестве $[0,T)\times\mathbb{R}^+$ (см. [12]), и между моментами скачков она удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t,\tilde{S}_t)=V(0,S_0)&+\int_0^t\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}(u,\tilde{S}_u)\,du+\int_0^t\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u(-\lambda E(U_1)du+\sigma(u)dB_u)\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial u^2}(u,\tilde{S}_u)\sigma^2(u)\tilde{S}_u^{\,2}\,du+\sum_{i=1}^{N_t}\left(\tilde{V}(\mathcal{T}_i,\tilde{S}_{\mathcal{T}_i})-\tilde{V}(\mathcal{T}_i,\tilde{S}_{\mathcal{T}_i-})\right),\end{aligned}\quad(24)$$

где $\tilde{S}_{\mathcal{T}_i}=(1+U_i)\tilde{S}_{\mathcal{T}_i-},i=1,2,\ldots$

Функция $\tilde{V}(t,x)$ – липшицева первого порядка по x (в соответствии с [12]), а процесс

$$M_t=\sum_{i=1}^{N_t}\left(\tilde{V}(\mathcal{T}_i,\tilde{S}_{\mathcal{T}_i})-\tilde{V}(\mathcal{T}_i,\tilde{S}_{\mathcal{T}_i-})\right)-\lambda\int_0^t\int_{-1}^{\infty}\left(\tilde{V}\left(u,\tilde{S}_u(1+z)\right)-\tilde{V}(u,\tilde{S}_u)\right)dh(z)du\quad(25)$$

есть интегрируемый мартингал, где $h(z)$ есть закон процесса U_i, $i=1,2,\ldots$

Из (24) и (25) получаем, что следующее выражение:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t,\tilde{S}_t)-\int_0^t\Bigg[&\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}(u,\tilde{S}_u)-\lambda E(U_1)\tilde{S}_u\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}(u,\tilde{S}_u)+\frac{1}{2}\sigma^2(u)\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial u^2}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u^{\,2}\\&-\lambda\int_{-1}^{\infty}\left(\tilde{V}\left(u,\tilde{S}_u(1+z)\right)-\tilde{V}(u,\tilde{S}_u)\right)dh(z)\Bigg]du\end{aligned}\quad(26)$$

есть мартингал, и можно записать (сравните с [9], где рассматривались акции без дивидендов)

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}(u,\tilde{S}_u)-\lambda E(U_1)\tilde{S}_u\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}(u,\tilde{S}_u)+\frac{1}{2}\sigma^2(u)\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial u^2}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u^{\,2}- \lambda\int_{-1}^{\infty}\left(\tilde{V}\left(u,\tilde{S}_u(1+z)\right)-\tilde{V}(u,\tilde{S}_u)\right)dh(z)\leq 0 \tag{27}$$

везде в $(0,T)\times\mathbb{R}^+$.

Согласно нашему предположению, функция $g(x)$ выпукла, поэтому из (6) и (23) следует, что и $\tilde{V}(t,x)$ выпукла по отношению к x (доказательство похоже на приведенное в [14], и поэтому мы его опустим). Следовательно, для слабой частной производной можем записать

$$\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial u^2}(u,\tilde{S}_u)\geq 0 \tag{28}$$

везде в $(0,T)\times\mathbb{R}^+$.

Теорема 4. *Отображение $\varsigma(t,x)=xV(t,x)$ является локально липшицевым по x, то есть для всех $0\leq t\leq T, 0<x,y<\infty$, имеем*

$$|\varsigma(t,x)-\varsigma(t,y)|\leq\left(Ae^{|\ln x|+|\ln y|}+c\left(e^{x+(2\bar{r}+3\lambda E(U_1))T}+1\right)+g(1)\right)|x-y|, \tag{29}$$

и локально липшицевым по t, то есть для $0\leq s\leq t<T, x>0$, справедливо

$$|\varsigma(t,x)-\varsigma(s,x)|\leq\frac{Bxe^{2|\ln x|}}{\sqrt{T-t}}|t-s|, \tag{30}$$

где A и B такие же, как в Теореме 3.

Доказательство. Используя (11), запишем

$$|\varsigma(t,x)-\varsigma(t,y)|=|xU(t,\ln x)-yU(t,\ln y)|\leq x|U(t,\ln x)-U(t,\ln y)|+|x-y|U(t,\ln y).$$

Используя (15) и (16), а также теорему о среднем значении, приходим к (29).

Подобным же образом, используя (11) и (17), придем к (30). □

Предложение 5. *Слабая частная производная $\frac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2}$ функции (6) удовлетворяет по отношению к переменной x следующей локальной оценке:*

$$x^2\left|\frac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2}\right|\leq\frac{D_1+D_2e^x+D_3e^{2|\ln x|}}{\sqrt{T-t}}, x>0, 0\leq t<T,$$

где D_1, D_2 и D_3 есть неотрицательные постоянные, значения которых зависят от $\bar{r},\bar{\sigma},\underline{\sigma},c,g(1),k,T,\lambda,E|U_1|,E((1+U_1)^2)$ и $E\left(|\ln(1+U_1)|e^{|\ln(1+U_1)|}\right)$.

Доказательство. Используя (23), неравенства (27) и (28), и заменяя x выражением $xe^{-\int_0^t r(u)du}$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases}-r(t)V(t,x)+\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}-\lambda xE(U_1)e^{-\int_0^t r(u)du}\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}+\dfrac{x^2}{2}\sigma^2(t)e^{-2\int_0^t r(u)du}\dfrac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2} \\ \qquad -\lambda\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\left(V\left(t,x(1+z)\right)-V(t,x)\right)dh(z)\leq 0 \text{ на } [0,T)\times\mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2}\geq 0, x>0.\end{cases} \tag{31}$$

Также, используя (11), получаем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial U(t,\ln x)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial U(t,\ln x)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2U(t,\ln x)}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial U(t,\ln x)}{\partial y}, x>0, 0\leq t<T.\end{cases} \tag{32}$$

С учетом последних соотношений, неравенства (31) дают

$$\left|\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}\right| \le \frac{2e^{2\int_0^t r(u)du}}{x^2\underline{\sigma}^2}\left[r(t)V(t,x) + \left|\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}\right| + \lambda x E|U_1|\left|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right| + \lambda\left|\int_{-1}^{\infty}\left(V\left(t,x(1+z)\right) - V(t,x)\right)dh(z)\right|\right].$$

Доказательство следует отсюда после применения (15) и Теоремы 3. □

Прежде чем перейти к локальной оценке Гёльдера, докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Функция* $\gamma(t,x) = x\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ *для всех* $0 \le t_1 \le t_2 \le T, x > 0$ *удовлетворяет соотношению*

$$|\gamma(t_2,x) - \gamma(t_1,x)| \le \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h}|\gamma(t_2,x) - \gamma(t_2,y)|dy + \int_x^{x+h}|\gamma(t_1,x) - \gamma(t_1,y)|dy + (x+h)|V(t_2,x+h) - V(t_1,x+h)| + x|V(t_2,x) - V(t_1,x)| + \int_x^{x+h}|V(t_2,y) - V(t_1,y)|dy\right],$$

где $h > 0$.

Доказательство из записи разности

$$\gamma(t_2,x) - \gamma(t_1,x) = \gamma(t_2,x) - \gamma(t_2,y) + \gamma(t_2,y) - \gamma(t_1,y) + \gamma(t_1,y) - \gamma(t_1,x)$$

для любого положительного y, а затем интегрирования по y от x до $x+h$. □

Из Теорем 3, 4 и Предложения 5 можно увидеть, что частная производная $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ функции (9) локально непрерывна по паре аргументов $(t,x), 0 \le t < T, x > 0$. Используя эту непрерывность, приходим к следующему результату.

Теорема 7. *Функция* $\gamma(t,x) = x\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ *для всех* $0 \le t_1 \le t_2 \le T, x > 0$ *по отношению к аргументу* t *удовлетворяет следующей локальной оценке Гёльдера степени ½*

$$|\gamma(t,x) - \gamma(s,x)| \le \frac{G(x)}{\sqrt{T-t}}|t-s|^{\frac{1}{2}}, 0 \le s \le t \le T, x > 0, \tag{33}$$

где положительная функция $G(x)$ *зависит от параметров* $\bar{r}, \bar{\sigma}, \underline{\sigma}, c, g(1), k, T, \lambda$ *модели, а также от* $E|U_1|$, $E((1+U_1)^2)$ *и* $E\left(|\ln(1+U_1)|e^{|\ln(1+U_1)|}\right)$.

Доказательство. Используя локальную непрерывность функции $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$, соотношения (32) и Предложение 5, можем записать

$$|\gamma(t,x) - \gamma(t,y)| = \left|x\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} - y\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| \le \frac{D_1 + D_2e^x + D_4e^{2|\ln x|}}{x\sqrt{T-t}}|x-y|, \tag{34}$$

где $D_4 = D_3 + A$ и $0 \le t < T, 0 < x \le y < \infty$.

Применяя неравенства (30) и (34) в Лемме 6, найдем

$$|\gamma(t_2,x) - \gamma(t_1,x)| \le \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h}\frac{D_1 + D_2e^x + D_4e^{2|\ln x|}}{x\sqrt{T-t_2}}(y-x)dy + \int_x^{x+h}\frac{D_1 + D_2e^x + D_4e^{2|\ln x|}}{x\sqrt{T-t_1}}(y-x)dy + \frac{B(x+h)e^{2|\ln(x+h)|}}{\sqrt{T-t_2}}|t_2-t_1| + \frac{Bxe^{2|\ln x|}}{\sqrt{T-t_2}}|t_2-t_1| + \int_x^{x+h}\frac{Be^{2|\ln y|}}{\sqrt{T-t_2}}|t_2-t_1|dy\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{D_1 + D_2e^x + D_4e^{2|\ln x|}}{x\sqrt{T-t_2}}h^2 + \left(\frac{B(x+h)e^{2|\ln(x+h)|}}{\sqrt{T-t_2}} + \frac{Bxe^{2|\ln x|}}{\sqrt{T-t_2}} + \frac{Bhe^{2|\ln(x+h)|}}{\sqrt{T-t_2}}\right)|t_2-t_1|\right].$$

Выберем $h = C^*|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}$, и тогда из последней оценки получим

$$|\gamma(t_2, x) - \gamma(t_1, x)| \le \frac{1}{\sqrt{T - t_2}}\left[\frac{D_1 + D_2 e^x + D_4 e^{2|\ln x|}}{x} C^* + \frac{B\left(x + C^*\sqrt{T}\right)e^{2|\ln(x + C^*\sqrt{T})|} + Bxe^{2|\ln x|} + BC^*\sqrt{T}e^{2|\ln(x + C^*\sqrt{T})|}}{C^*}\right]|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Минимальное значение величины C^*, которая является функцией x и зависит от констант в правой части этого неравенства, может быть найдено из этого соотношения. На этом доказательство закончено. □

Заключение. В настоящей статье опи функция цены американского опциона (как пут, так и колл) на акции с выплатой дивидендов в модели диффузии со скачками. Эта функция была преобразована в эквивалентную форму. Доказано, что функция в новой форме является локально липшицевой по пространственной переменной, а также допускает оценку Гёльдера степени Построенная функция имеет слабые частные производные 1-го порядка по времени и 1-го и 2-го порядка – по пространственной координате. Вторая слабая частная производная найденной функции является локально ограниченной.

**Авторы выражают благодарность за финансовую поддержку Комиссии по высшему образованию Пакистана.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // The Journal of Political Economy. 1973. V. 1. P. 637- .
2. Chiarella C., Kang B. The evaluation of American compound option prices under stochastic volatility and stochastic interest rates // The Journal of Computational Finance. 2011. V.14. № 9. P. 1-21
3. El Karoui N.E., Jeanblanc Picqu M., Shreve S.E. Robustness of the Black and Scholes formula // Mathematical Finance. 1998. V. 8. № 2. P. 93-126
4. Elliot R., Kopp P. Option Pricing and Hedge Portfolio for Poisson Process // Stochastic Analysis and Applications. 1990. V. 8. P. 157-167
5. Glowinsky R., Lions J.L., Treamoliyeres R. Numerical Analysis of Variational Inequalities. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, New York, 2011.
6. Hussain S., Shashiashvili M. Discrete time hedging of the American option // Mathematical Finance. 2010. V. 20. № 4. P. 647–670
7. Hussain S., Rehman N. Estimate for the discrete time hedging error of the American option on a dividend paying stock // Math. Inequal. Appl. 2012. V. 15. P. 137-163
8. Hussain S., Rehman N. Regularity of the American Option Value Function in Jump-Diffusion Model // Journal of Computational Analysis and Applications. 2017. V. 22. P. 286-297.
9. Israel V.P., Rincon M.A. Variational inequalities applied to option market problem // Applied Mathematics and Computation. 2008. V. 201. № 1. P. 384-397.
10. Jaillet P., Lamberton D., Lapeyre B. Variational inequalities and the pricing of American options // Acta Applicandae Mathematica. 1990. V. 21. № 3. P. 263-289.
11. Karatzas I., Shreve S.E. Methods of mathematical finance. Springer Science and Business Media, 1998.
12. Lamberton D., Lapeyre B. Stochastic Calculus Applied to Finance. UK: Chapman and Hall, 1997.
13. Leduc G. Can High-Order Convergence of European Option Prices be Achieved with Common CRR-Type Binomial Trees? // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. 2015. DOI 10.1007/s40840-015-0221-2. P. 1-14.
14. Pham H. Optimal stopping, free boundary, and American option in a jump diffusion model // Applied Mathematics and Optimization. 1997. V. 35. № 2. P.145-164.
15. Rehman N., Hussain S., Wasim Ul-Haq. Sensitivity analysis of the optimal exercise boundary of the American put option // Georgian Mathematical Journal. 2016. V. 23. № 3. P.429-433.
16. Rehman N., Shashiashvili M. The American Foreign Exchange option in Time-Dependent One-Dimensional Diffusion Model // Appl. Math Optim. 2016. V. 59. № 3. P. 329-363.
17. Royden H.L. Real analysis. New Delhi: Macmillan, Prentice-Hall of India, 1997.
18. Shreve, S.E. Stochastic Calculus for Finance. I. Springer, 2004.
19. Shreve S.E. Stochastic Calculus for Fi-
20. Situ R. Theory of Stochastic Differential Equation with Jumps and Applications. New York: Springer, 2012.
21. Zhang X.L. Numerical analysis of American option pricing in a jump diffusion model // Mathematics of Operations Research. 1997. V.22. № 3. P. 668–690.

Zuev S.V., Benderskaya O.B.

EVOLUTION OF AMERICAN OPTION VALUE FUNCTION ON A DIVIDEND PAYING STOCK UNDER JUMP-DIFFUSION PROCESSES

This work is devoted to the analysis and evolution of the value function of American type options on a dividend paying stock under jump diffusion processes. An equivalent form of the value function is obtained and analyzed. Moreover, variational inequalities satisfied by this function are investigated. These results can be used to investigate the optimal hedging strategies and optimal exercise boundaries of the corresponding options.

Key words: *american option, jump-diffusion model, poisson process, locally lipschitz continuity, weak derivatives.*

Хуссейн Султан, PhD, доцент кафедры математики института информационных технологий.
Университет COMSATS.
Адрес: .
E-mail:

Али Файха, PhD, доцент кафедры электротехнического инжиниринга.
Колледж NAMAL.
Адрес: .

Хуссейн Закир, PhD, доцент кафедры математики института информационных технологий.
Университет COMSATS.
Адрес: .
E-mail:

Рехман Назир, PhD, заведующий кафедрой математики.
Открытый университет Аллама Икбаль.
Адрес: .

Зуев Сергей Валентинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.
E-mail: sergey.zuev@bk.ru

Бендерская Ольга Борисовна, кандидат экономических наук, доцент кафедры бухгалтерского учета и аудита.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.
E-mail: obenderskaya@gmail.com