

DOI: 10.12737/article\_5926a059566743.07303129

*Ганджунцев М.И., канд. техн. наук, доц.*  
*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет*  
*Кондратенко В.Е., канд. техн. наук, доц.*  
*Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»*

## МЕТОДИКА ПОВЕРОЧНОГО РАСЧЕТА МОНОЛИТНЫХ БАЛОЧНЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ МПА

oppmgsu2014@yandex.ru

Предложена методика расчета неразрезных пластин на упругоподатливых опорах, которая может быть использована для поверочных расчетов монолитных многопролетных перекрытий по балочным системам зданий. Решение задачи построено на приближенной замене разрешающих дифференциальных уравнений системой разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА). В качестве иллюстрации методики рассмотрен расчет неразрезной двухпролетной пластины. Данная методика обладает быстрой сходимостью, простотой алгоритма, позволяет получать результаты, обладающие высокой точностью при небольшом числе разбиений. Она может быть рекомендована для использования в практике проектных организаций для выполнения расчетных обоснований, проверки результатов, полученных с использованием коммерческих расчетных комплексов.

**Ключевые слова:** неразрезные пластины, упругоподатливые опоры, разностные уравнения, поверочный расчет, метод последовательных аппроксимаций.

Распространенным типом перекрытий промышленных зданий является монолитное перекрытие с опиранием на систему балок. Ниже предложена приближенная методика определения напряженно-деформированного состояния таких систем. При моделировании совместной работы плиты перекрытия и поддерживающих ее балок пренебрегаем силами трения между монолитной плитой и поддерживающими её балками [6]. Считаем, что балки являются упругоподатливыми опорами и воспринимают только вертикальную составляющую нагрузки [5].

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности плиты [1]:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где  $W$  – прогиб;  $q$  – распределенная нагрузка;  $D$  – цилиндрическая жесткость плиты постоянной толщины.

Представим (1) в виде системы двух дифференциальных уравнений записанных в безразмерном виде [2],[4],[7]:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -p; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + 4m_{i,j-1} - 20m_{i,j} + 4m_{i,j+1} + m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1} - \\ & - \frac{h}{2} ({}^{I-II} \Delta m_{i,j-1}^\xi - 7{}^{I-II} \Delta m_{i,j}^\xi - 7{}^{III-IV} \Delta m_{i,j}^\xi + {}^{III-IV} \Delta m_{i,j+1}^\xi) - \frac{h}{2} ({}^{I-III} \Delta m_{i-1,j}^\eta - 7{}^{I-III} \Delta m_{i,j}^\eta - 7{}^{II-IV} \Delta m_{i,j}^\eta + {}^{II-IV} \Delta m_{i+1,j}^\eta) = \\ & = -\frac{3}{2} h^2 ({}^I p_{i,j} + {}^{III} p_{i,j} + {}^{II} p_{i,j} + {}^{IV} p_{i,j}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -m, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{a}; m = \frac{M}{q_0 a^2}; w = \frac{WD}{q_0 a^4}; p = \frac{q}{q_0} \end{aligned} \right\}$$

$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$ ; где  $a$  – длина стороны плиты;

$q_0$  – интенсивность нагрузки в какой-либо точке;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $M_x$  и  $M_y$  – значения изгибающих моментов вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно.

Разностное уравнение, аппроксимирующее (2) по МПА [2], [3], запишем здесь на квадратной сетке (рис.1) при непрерывных  $m$ , полагая, что нагрузка  $p$  в пределах каждого элемента постоянна, но меняется скачкообразно при переходе от одного элемента к другому. При этом будем учитывать конечные разрезы  $m^\xi, m^\eta$ .

Получим:

где  ${}^{I-II}\Delta m_{i,j}^{\xi} = {}^I m_{i,j}^{\xi} - {}^{II} m_{i,j}^{\xi}$ ;  ${}^{I-III}\Delta m_{i,j}^{\eta} = {}^I m_{i,j}^{\eta} - {}^{III} m_{i,j}^{\eta}$ ; остальные члены с  $\Delta$  имеют аналогичный смысл; верхние левые индексы при  $p$  означают номер элемента, которому принадлежит нагрузка  $p$  (рис.1),

$$m^{\xi} = \frac{\partial m}{\partial \xi}; m^{\eta} = \frac{\partial m}{\partial \eta}.$$

$$\begin{aligned} &w_{i-1,j-1} + 4w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + 4w_{i,j-1} - 20w_{i,j} + 4w_{i,j+1} + w_{i+1,j-1} + 4w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1} - \\ &-\frac{h^3}{24}(\Delta^{I-II} m_{i,j-1}^{\xi} + 5\Delta^{I-II} m_{i,j}^{\xi} + 5\Delta^{III-IV} m_{i,j}^{\xi} + \Delta^{III-IV} m_{i,j+1}^{\xi} + \Delta^{I-III} m_{i-1,j}^{\eta} + 5\Delta^{I-III} m_{i,j}^{\eta} + 5\Delta^{II-IV} m_{i,j}^{\eta} + \Delta^{II-IV} m_{i+1,j}^{\eta}) + \\ &+\frac{h^2}{12}(m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + 4m_{i,j-1} + 52m_{i,j} + 4m_{i,j+1} + m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

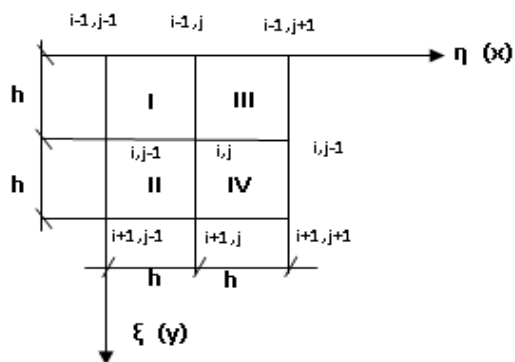


Рис. 1. Аппроксимация на квадратной сетке

Уравнения (4) и (5) записываются для всех регулярных точек сетки с учетом краевых условий и решаются совместно.

$$w_{i,j}^{\xi\xi} = \frac{1}{2h^2} w_{i-1,j} - \frac{1}{2h^2} w_{i,j-1} - \frac{1}{2h^2} w_{i,j+1} + \frac{1}{2h^2} w_{i+1,j} + \frac{1}{20} m_{i-1,j} - \frac{1}{20} m_{i,j-1} - \frac{1}{2} m_{i,j} - \frac{1}{20} m_{i,j+1} + \frac{1}{20} m_{i+1,j}. \quad (6)$$

При найденных по (6) значениях  $w^{\xi\xi}$  и уже известных из решения задачи  $m$  величины  $w^{\eta\eta}$  можно определить из (3). После определения  $w^{\xi\xi}$ ,  $w^{\eta\eta}$  величины безразмерных изгибающих моментов в направлении осей  $\xi$  и  $\eta$  вычисляются по формулам:

$$m^{(\xi)} = -(w^{\xi\xi} + \nu \cdot w^{\eta\eta}); m^{(\eta)} = -(w^{\eta\eta} + \nu \cdot w^{\xi\xi}) \quad (7)$$

В уравнениях, приведенных выше,  $w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$ ;  $w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$ ; верхний правый индекс в скобках означает направление, например,  $m^{(\eta)}$  – внутренний безразмерный изгибающий момент в направлении оси  $\eta$ .

Из сопоставления дифференциальных уравнений (2) и (3) следует, что для аппроксимации последнего по МПА можно в левой части (4)  $m$  и  $p$  заменить соответственно на  $w$  и  $t$  в выражениях для прогибов. Для случая непрерывных  $w$ ,  $w^{\xi\xi}$ ,  $w^{\eta\eta}$  и  $m$  получим

Для расчета шарнирно (свободно) опертых плит достаточно уравнений (4), (5), поскольку в краевых точках сетки  $m = w = 0$  [2].

После определения  $m$  и  $w$  переходим к вычислению внутренних усилий. Для этого предварительно следует вычислить  $w^{\xi\xi}$  в тех расчетных точках сетки, которые представляют интерес для расчетчика. Записывая формулу на квадратной сетке для случаев непрерывных  $m$ ,  $w$ ,  $w^{\xi\xi}$ , получим:

В качестве примера рассмотрим расчет двухпролетной неразрезной пластины, опертой по контуру шарнирно, с центрально расположенной промежуточной упруго-податливой диафрагмой. Пластина загружена равномерно-распределенной нагрузкой  $p=1$  на участке 01–41 и 03–43. Схема пластины с нанесенной расчетной сеткой и номерами узлов приведена на рис. 2 (при  $h=1/4$ ).

Продемонстрируем составление разностных уравнений для точки 22. В данной точке неизвестными являются значения трех величин: изгибающего момента  $m_{22}$ , прогиба плиты  $w_{22}$  и  $\Delta m_{22}^{\eta}$ . – скачка в функции поперечной силы в направлении  $\eta$ , обусловленного реакцией со стороны балки. С учетом симметрии задачи уравнение (4) примет следующий вид:

$$4m_{11} + 8m_{12} + 4m_{21} - 20m_{22} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2\Delta m_{12}^{\eta} - 14\Delta m_{22}^{\eta}) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot 2 \quad (8)$$

Уравнение (5) для той же точки примет такой вид:

$$2w_{11} + 8w_{12} + 2w_{13} + 4w_{21} - 20w_{22} + 4w_{23} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{64} (2\Delta m_{12}^\eta + 10\Delta m_{22}^\eta) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} (2m_{11} + 8m_{12} + 2m_{13} + 4m_{21} + 52m_{22} + 4m_{23}) = 0 \quad (9)$$

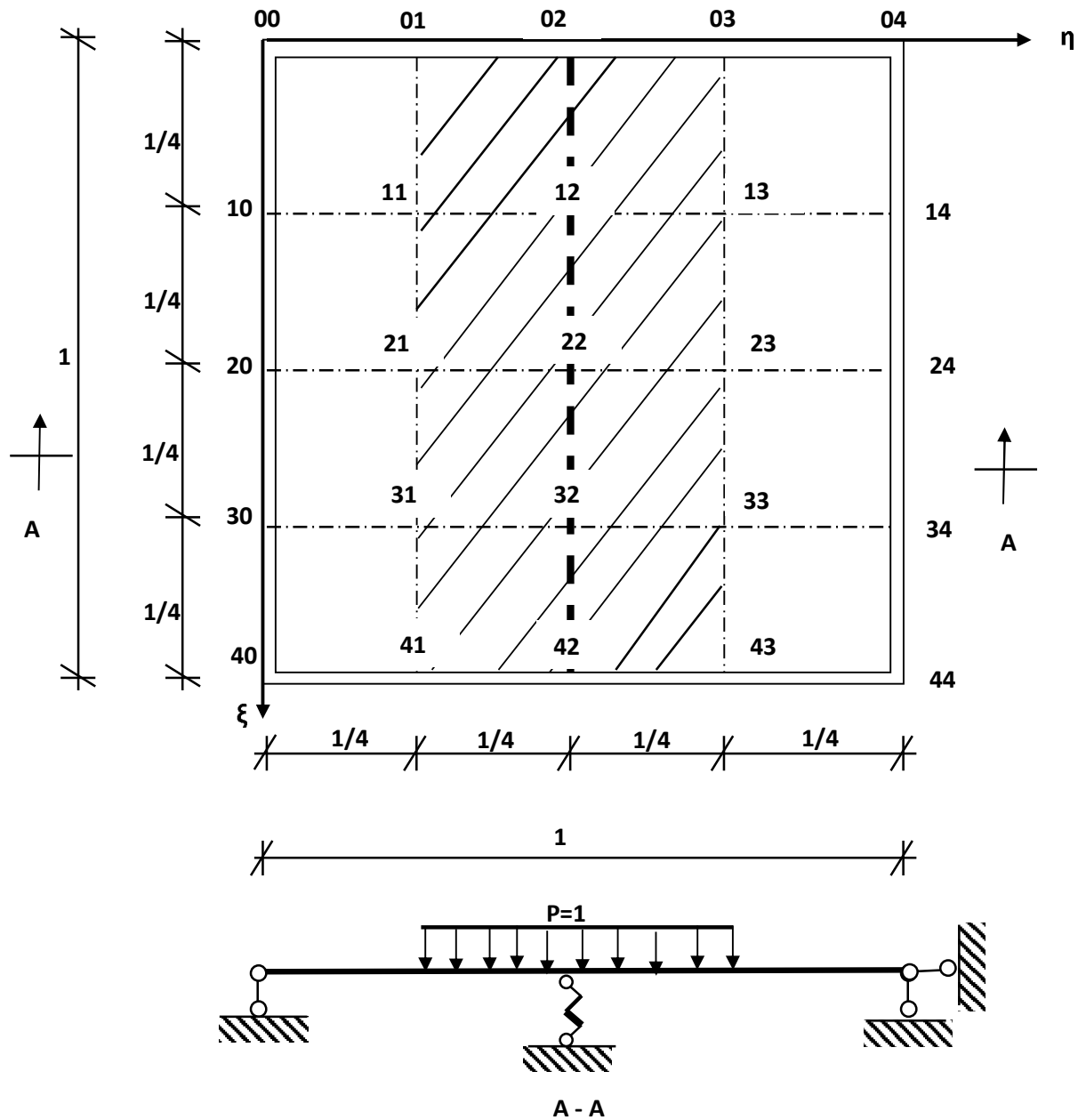


Рис.2 Расчетная схема задачи и нумерация узлов

Полученные два уравнения необходимо дополнить выражением для вертикальной реакции, подчиняющейся гипотезе Винклера и действующей на плиту со стороны балки, пропорциональной жесткости опоры

$$\Delta m_{ij}^\eta = -r_{ij}w_{ij} \quad (10)$$

В реальных расчетах жесткость должна быть определена для каждой расчетной точки.

Зададимся безразмерным значением жесткости  $r_{12} = 15,806$  и  $r_{22} = 8,88$ . Тогда, учиты-

вая (10),  $\Delta m_{12}^\eta = -15,806 w_{12}$  и  $\Delta m_{22}^\eta = -8,88w_{22}$ . Знак минус указывает на то, что реакция направлена снизу вверх. Следует иметь в виду, что для точки 12, как и для всех точек контакта плиты с упругой опорой, необходимо систему уравнений (4) и (5) дополнить выражением (10).

В таблице 1 приведены значения прогиба для двух случаев:

1 – плиты с промежуточной упругоподатливой опорой на сетке  $h = 1/4$ ;

2 – с абсолютно жесткой опорой.

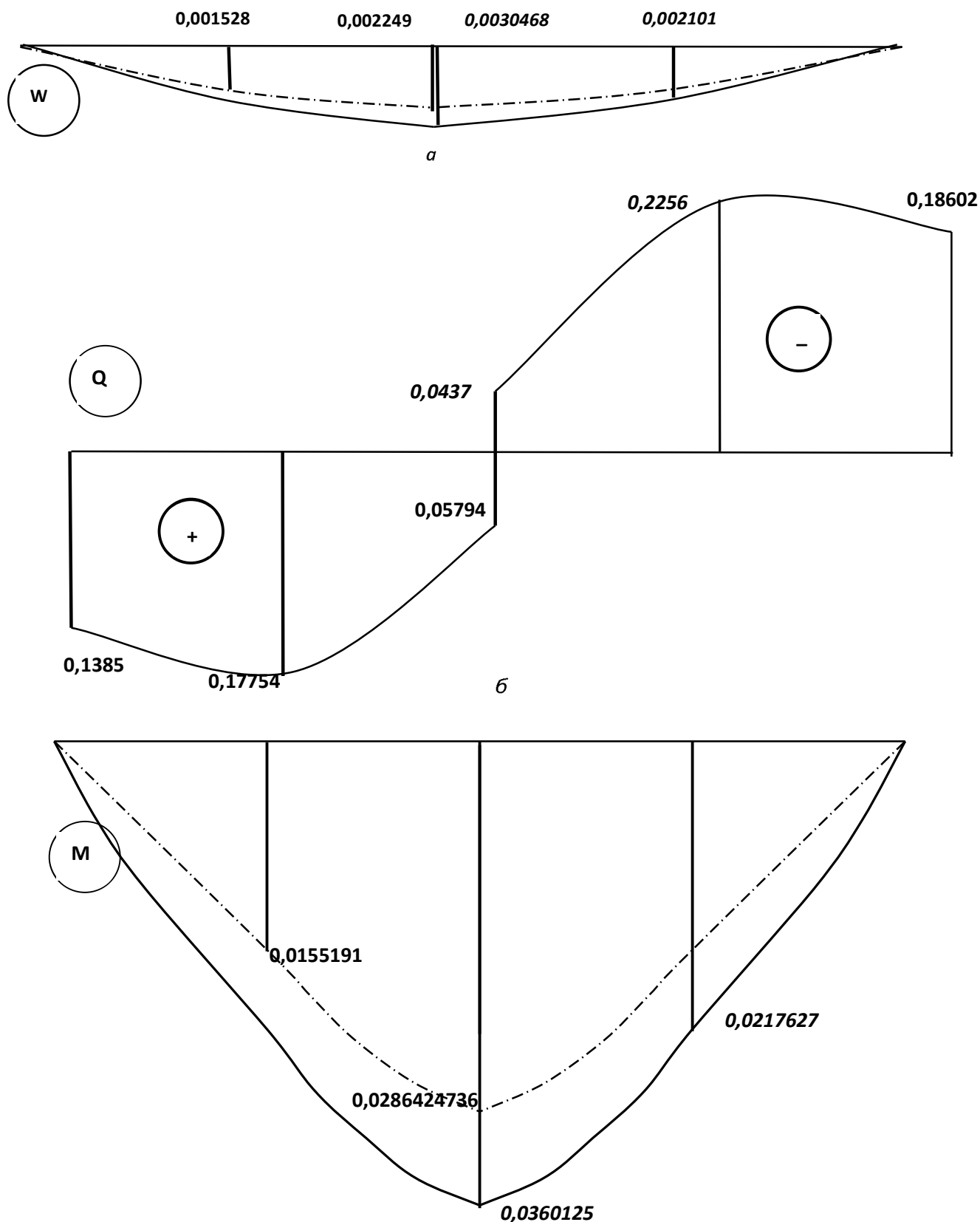


Рис. 3. Эпюры безразмерных прогибов (а) и моментов (в) по линиям 10–14(пунктиром) и 20–24(сплошной линией), безразмерных поперечных сил (б) по линии 10–14 (слева) и 20–24 (справа)

Таблица 1

**Безразмерные прогибы плиты  
(увеличенные в 1000 раз)**

Варианты	Величина Шаг	$w_{21}$	$w_{22}$
1	1/4	2,101	3,046
2	1/4	0,14	0

На рис. 3 приведены эпюры безразмерных прогибов, моментов и поперечных сил в направлении  $\eta$  для рассмотренного примера.

**Заключение.** Предложенная методика обладает быстрой сходимостью, простотой алгоритма, позволяет получать результаты, обладающие высокой точностью при небольшом числе разбиений. Она может быть рекомендована для использования в практике проектных организаций для: выполнения расчетных обоснований, проверки результатов, полученных с использованием коммерческих расчетных комплексов.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.. Пластины и оболочки. М.: Издательство «Наука», 1966. 636 с.

2. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. М.: Изд-во АСВ, 2008. 280 с.

3. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Численный метод расчета составных стержней и пластин с абсолютно жесткими поперечными связями. М.: Изд-во АСВ, 2014. 200 с.

4. Габбасов Р.Ф. Расчет плит с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций // Строительная механика и расчет сооружений. 1980. №3. С. 27–30.

5. Филатов В.В. О расчете неразрезных составных балок // Промышленное и гражданское строительство. 2009. №8. С. 59–60.

6. Ганджунцев М.И., Кондратенко В.Е. Методика и некоторые результаты расчета лесов опалубки монолитного перекрытия // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2015. №2. С. 33–36.

7. Gabbasov R.F., Koppler H. Vergleich der Losing genaherter Differentialgleichungen fur Schalen in elastiseber umgebung mit anderen Berechnungsmethoden // Wiss.Zeitsch.der Hochsch. fur Arch. und Bauw. Weimar, 1974, Heft 3/4, Pp.321–325.

**Gandzountsev M.I., Kondratenko V.E.**

#### **THE APPLICATION OF CONSEQUENT APPROXIMATION METHOD TO THE PROBLEM OF RC SLAB DESIGN ESTIMATION**

*The article proposes a method of continuous plates design supported by flexible bearings, that can be applied for design of reinforced concrete (RC) multispans slabs resting on beams inside weaving factories buildings. The solution of the problem utilizes on approximate substitution of resolving system of differential equations with the finite-difference equations of consequent approximation method. In order to illustrate the proposed method, an example of design calculation procedure for continuous two-span slab is solved. Proposed method is defined by fast convergence, algorithm simplicity which results in less grid amount needed for accurate results. This application of this method is advisable in design practice for justifying calculations, follow-up of calculations made by commercial finite-element software.*

**Key words:** *continuous plate, flexible bearings, finite-difference, justifying calculations, consequent approximations method.*

**Ганджунцев Михаил Иоакимович**, кандидат технических наук, доцент, кафедра строительной и теоретической механики.

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет.

Адрес: Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

Email: oppmgsu2014@yandex.ru

**Кондратенко Валерий Ерофеевич**, кандидат технических наук, кафедра инжиниринга технологического оборудования.

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС».

Адрес: Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, д.6