DOI: 10.12737/article_5940f01a616a84.86597798

***Горлов А.С., канд. техн. наук, доц.,***
***Петрашев В.И., ст. преп.***
***Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова***

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ О ВЫСЫХАНИИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

**petrashev_v@mail.ru**

*В статье на основе классической задачи Стефана предложена математическая модель высыхания материалов с неискривлённой поверхностью и получено асимптотическое решение однофазной задачи при больших значениях времени высыхания.*

***Ключевые слова:*** *температура, задача Стефана, теплота парообразования, удельная теплоёмкость, слой высохшего материала.*

**Введение.** В таких отраслях промышленности как производство цемента, деревообработка, химическая промышленность и другие применяются процессы сушки материала. Управление такими процессами включает в себя расчёты их продолжительности, затрат тепловой и электрической энергии и, как следствие, себестоимости и рентабельности. Эти расчёты часто требуют оценки количества высохшего материала в зависимости от времени сушки, температурного режима, влажности материала или, наоборот, временных затрат для достижения нужного количества высохшего материала. Предлагаются формулы для таких оценок и способы их применения.

**Физическая модель процесса.** Рассмотрим сначала физическую модель процесса сушки – основу математической модели.

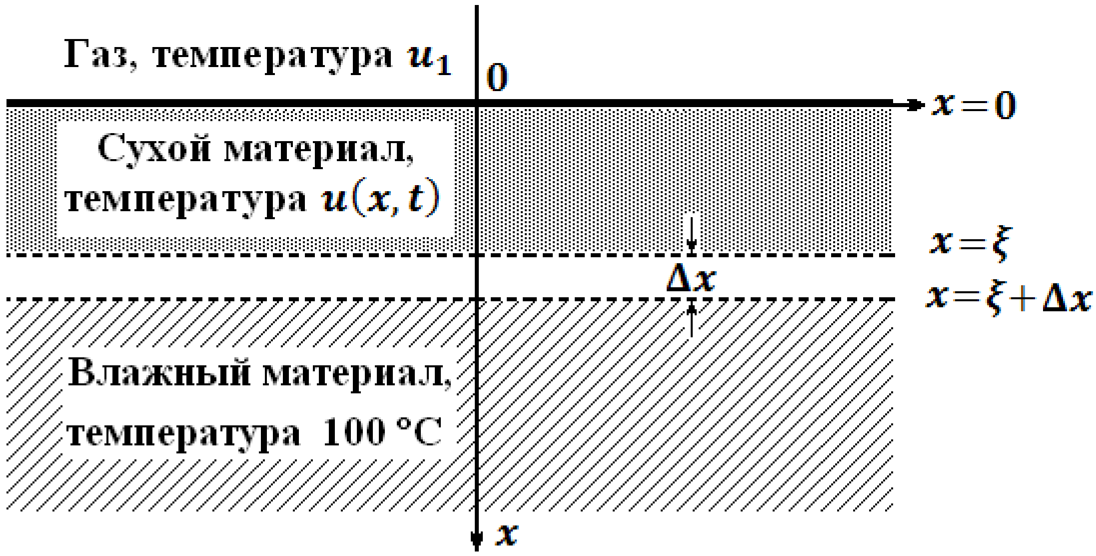


Рис. 1. К постановке задачи для неискривлённой поверхности

Процесс сушки будем рассматривать с того момента, когда интенсивное испарение воды с поверхности материала прекратилось, а в пар превращается только жидкость, находящаяся внутри материала в «защемлённом» состоянии. На поверхности $x=\xi$ температура сухого материала $U(\xi;t)$ равна температуре фазового перехода 100 °C. Эта поверхность движется внутрь материала по мере поглощения им тепла (теплота парообразования). В начальный момент времени будем считать весь материал с неискривлённой поверхностью $x=0$ нагретым до 100 °C (то есть $\xi(0)=0$).

За время $\Delta t$ фазовая поверхность (плоскость $\xi(t)$) переместится на расстояние $\Delta\xi$. При этом в пар превратится масса $\alpha\rho_в\Delta\xi$, где $\rho_в$ – плотность воды, $0<\alpha<1$ – влажность материала, и поглотится количество тепла $\alpha r\rho_в\Delta\xi$, где $r$ – удельная теплота парообразования воды. Для выполнения теплового баланса при $x=\xi$ должно выполняться условие Стефана:

$$-K\frac{\partial u}{dx}\bigg|_{x=\xi}\cdot\Delta t=\alpha r\rho_в\Delta\xi,$$

где $K$ – коэффициент теплопроводности сухого материала. На границе газ-материал ($x=0$) выполняется условие теплообмена:

$$-K\frac{\partial u}{dx}\bigg|_{x=0} = h(U_1 - U|_{x=0}),$$

где $h$ – коэффициент теплообмена.

**Математическая модель.** Обозначив для краткости $\frac{h}{K} = \delta$, $\frac{K}{ar\rho_в} = \gamma$, $\Delta U = U_1 - 100$, и записав условие Стефана в виде $\xi' = -\gamma\frac{\partial u}{dx}\Big|_{x=\xi}$ [1], получим математическую модель высыхания материала с неискривлённой поверхностью:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le \xi,\ t \ge 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{dx}\bigg|_{x=0} = \delta(U|_{x=0} - U_1),\ t \ge 0; \qquad (2)$$

$$U|_{x=\xi} = 100,\ t \ge 0; \qquad (3)$$

$$\xi' = -\gamma\frac{\partial u}{dx}\bigg|_{x=\xi},\ t \ge 0; \qquad (4)$$

$$\xi(0) = 0; \qquad (5)$$

где $a^2 = \frac{K}{c\rho_м}$ – коэффициент температуропроводности сухого материала с удельной теплоёмкостью $c$ и плотностью $\rho_м$.

Здесь искомой является зависимость размера слоя высохшего материала от времени $\xi(t)$. Эту зависимость можно получить в виде степенного ряда [2]:

$$\xi_1(t) = \gamma\delta\Delta ut - \left(\gamma^2\delta^3\Delta u^2 + \frac{1}{a^2}\gamma^3\delta^3\Delta u^3\right)\frac{t^2}{2!} + \left(3\gamma^3\delta^5\Delta u^3 + \frac{8}{a^2}\gamma^4\delta^5\Delta u^4 + \frac{5}{a^4}\gamma^5\delta^5\Delta u^5\right)\frac{t^3}{3!} - \cdots \qquad (6)$$

Отсюда можно получить представление о ходе процесса сушки, но только лишь в его начале. Для оценок $\xi(t)$ за длительные промежутки времени потребовалась бы трудоёмкая работа по вычислению других слагаемых в (6) при неизвестном интервале сходимости этого ряда.

Верхнюю границу для $\xi(t)$ при длительном процессе сушки можно получить, рассмотрев идеальный материал с нулевой удельной теплоёмкостью $c$, не поглощающий тепло. В этом случае $a^2 = \frac{K}{c\rho_м} \to \infty$, а (1) принимает вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Отсюда $u(x,t) = x\varphi(t) + \psi(t)$. Согласно (2) и (3) определяем произвольные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а затем решаем задачу Коши (4) и (5), получаем

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + 2\gamma\Delta ut} - \frac{1}{\delta}$$

или, после умножения и деления на сопряжённое выражение

$$\xi_2 = \frac{2\gamma\delta\Delta ut}{\sqrt{1+2\gamma\delta^2\Delta ut}+1}. \qquad (7)$$

Так как всё тепло в идеальном материале идёт только на испарение, то $\xi(t) < \xi_2(t)$, $t > 0$. Из (7), в частности, следует, что даже для идеального материала при данных условиях скорость роста слоя высохшего материала $\xi_2'(t) = \frac{\gamma\Delta u}{\sqrt{\frac{1}{\delta^2}+2\gamma\Delta ut}}$ стремится к нулю при $t \to \infty$, а, следовательно, $\xi'(t)$ тоже.

Далее рассмотрим реальный материал. Продифференцируем (3) по $t$:

$$\frac{d}{dt}\big(u(\xi(t);t)\big) = \frac{\partial u(\xi;t)}{\partial\xi}\cdot\xi' + \frac{\partial u(\xi;t)}{\partial t} = 0. \qquad (8)$$

Записав (4) в виде $\xi' = -\gamma\frac{\partial u(\xi;t)}{\partial\xi}$ и подставив в (8), получим

$$\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial u(\xi;t)}{\partial\xi}\right)^2 \qquad (9)$$

Так как при $x = \xi$ (1) имеет вид $\frac{\partial u(\xi;t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(\xi;t)}{\partial\xi^2}$, то учитывая (9), получим

$$a^2\frac{\partial^2 u(\xi;t)}{\partial\xi^2} = \gamma\left(\frac{\partial u(\xi;t)}{\partial\xi}\right)^2.$$

Считая $t$ параметром, отсюда получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a^2\frac{d^2u}{d\xi^2} = \gamma\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2.$$

Из него находим $\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{a^2}\xi + C}$. Заменив здесь произвольную постоянную $C$ произвольной функцией времени $C = \frac{1}{\lambda(t)}$, получим

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{a^2}\xi + \frac{1}{\lambda(t)}} = -\frac{\lambda(t)}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1}. \qquad (10)$$

Следовательно, в соответствии с (4)

$$\xi' = \frac{\gamma\lambda(t)}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1}. \qquad (11)$$

Умножив обе части (11) на $2\xi$, получим

$$(\xi^2)' = 2a^2 - \frac{2a^2}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1}. \qquad (12)$$

Интегрируя по $\xi$ уравнение (10), получим:

$$u(\xi;t) = -\frac{a^2}{\gamma}ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) + \psi(t), \qquad (13)$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция.

Эта функция зависит только от времени $t$ и не зависит от $\xi$, а это возможно лишь при $x = 0$, то есть $\psi(t) = u(x,t)|_{x=0}$.

Из (13) в соответствии с (3) имеем:

$$-\frac{a^2}{\gamma}ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) + \psi(t) = 100,$$

отсюда

$$\psi(t) = 100 + \frac{a^2}{\gamma} ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) = u(x,t)|_{x=0}.$$

Но при достаточно большой продолжительности сушки температура поверхности высохшего материала $u(x,t)|_{x=0}$ возрастает и выравнивается с температурой газа $u_1$. Таким образом,

$$u(x;t) = 100 + \frac{a^2}{\gamma} ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) \to u_1,$$

а потому возрастает и величина $\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1$, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a^2}{\gamma} ln\left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) = u_1 - 100 = \Delta u.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1\right) = e^{\frac{\gamma\Delta u}{a^2}}. \quad (14)$$

Интегрируя (12), получим

$$\xi^2 = 2a^2 t - 2a^2 \int_0^t \frac{dy}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(y)\xi + 1},$$

отсюда

$$\frac{\xi^2}{2a^2 t} = 1 - \frac{\int_0^t \frac{dy}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(y)\xi+1}}{t}.$$

Переходя здесь к пределу при $t \to \infty$, учитывая, что в силу (14) интеграл расходится, по правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi^2}{2a^2 t} = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{\gamma}{a^2}\lambda(t)\xi + 1} = 1 - e^{-\frac{\gamma\Delta u}{a^2}}.$$

Это значит, что при больших значениях $t$ величина $\xi(t)$ асимптотически стремится к значениям

$$\xi_3(t) = \sqrt{2a^2\left(1 - e^{-\frac{\gamma\Delta u}{a^2}}\right)t}, \quad (15)$$

оставаясь меньше их.

Для обеспечения большей точности расчётов дополним (15) ещё одной возможностью оценки $\xi(t)$. Для этого заметим, что из (12) с учётом (14) следует, что величина $1 - \frac{(\xi^2)'}{2a^2}$ монотонно убывает и ограничена. Тогда, выразив из (11) $\frac{1}{\lambda(t)} = \frac{\gamma\left(1 - \frac{(\xi^2)'}{2a^2}\right)}{\xi'}$ и учитывая, что $\xi'(t) \to 0$ при $t \to \infty$, получаем, что $\lambda(t)$, монотонно убывая, стремится к нулю при $t \to \infty$. Из (11), учитывая (5) и то, что из (6) следует $\xi'(0) = \gamma\delta\Delta u$, найдём $\lambda(0) = \delta\Delta u$ – максимальное значение $\lambda(t)$. Заменяя в (11) $\lambda(t)$ максимальным значением, получим

$$\xi_4' = \frac{\gamma\delta\Delta u}{\frac{\gamma}{a^2}\delta\Delta u \xi_4 + 1}.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $\xi_4'(0) = 0$, получим

$$\xi_4(t) = \frac{2\gamma\delta\Delta u t}{\sqrt{1 + 2\gamma\delta^2\Delta u t \cdot \frac{\gamma\Delta u}{a^2}} + 1}. \quad (16)$$

Очевидно, что истинное значение $\xi(t) < \xi_4(t)$. Сравнивая (7) и (16), заметим, что при $\frac{\gamma\Delta u}{a^2} = 1$ величины $\xi_2(t)$ и $\xi_4(t)$ совпадают, при $\frac{\gamma\Delta u}{a^2} > 1$ имеем $\xi_2(t) > \xi_4(t)$, а при $\frac{\gamma\Delta u}{a^2} < 1$ $\xi_2(t) < \xi_4(t)$. Представим графически полученные зависимости (для случая $\frac{\gamma\Delta u}{a^2} > 1$).

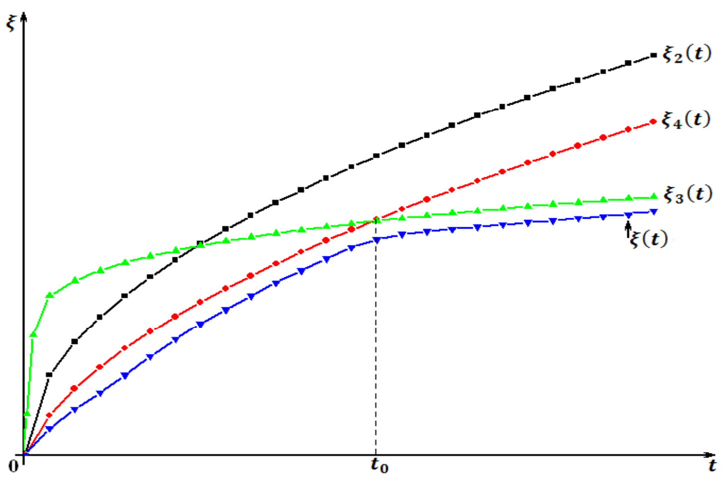


Рис. 2. К оценке $\boldsymbol{\xi(t)}$

**Выводы.** Обозначим $\frac{\gamma\Delta u}{a^2} = \mu$, тогда при $\mu > 1$ имеем $\xi_4(t) < \xi_2(t)$, следовательно, истинное значение $\xi(t)$ надо оценивать как $\xi(t) < \xi_4(t)$ при $t < t_0$ и как $\xi(t) < \xi_3(t)$ при $t > t_0$, где $t_0 = \frac{2}{\gamma \Delta u \mu a^2}(e^{2\mu} - e^{\mu})$ – корень уравнения $\xi_3(t) = \xi_4(t)$ (см. рис. 2).

При $\mu < 1$ имеем $\xi_2(t) < \xi_4(t)$, поэтому истинное значение $\xi(t)$ надо оценивать как $\xi(t) < \xi_2(t)$ при $t < t_1$ и как $\xi(t) < \xi_3(t)$ при $t > t_1$ где $t_1 = \frac{2(1-e^{-\mu})}{\delta^2 a^2 (\mu - 1 + e^{-\mu})^2}$ – корень уравнения $\xi_3(t) = \xi_2(t)$.

Полученные формулы для $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, $\xi_4(t)$ удобны для практического применения при организации и расчёте технологических процессов сушки материалов в различных отраслях промышленности.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.

2. Петрашев В.И. Об оценке толщины высохшего слоя шлама в цементной печи // Известия вузов, «Строительство». 2000. № 10(502). С. 124–129.

3. Федоренко Б.З. Оценки теплотехнологических процессов в цепных завесах цементных печей / Математическое моделирование технологических процессов в производстве строительных материалов и конструкций // Сб. научн. Трудов, Белгород: БелГТАСМ, 1998. С. 10–16.

4. Муштаев В.И., Ульянов В.М. Сушка дисперсных материалов. М.: Химия, 1988. 352 с.

5. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайзгне, 1967. 458 с.

6. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.

7. Лыков М.В. Сушка в химической промышленности. М.: Химия, 1988. 352 с.

8. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

9. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи математических наук. 1985. 40:5(245). С. 135–185.

10.Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Доклады АН СССР. 1960. № 5. С. 135.

11.Меламед В.Г. Сведения задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН СССР, Серия: Геофизика. 1958. № 7.

**Gorlov A.S., Petrashev V.I.**

**ASYMPTOTIC SOLUTION OF SINGLE-PHASE PROBLEM ABOUT DRYING OF MATERIALS AT HIGH VALUES OF TIME**

*In article mathematical drying model of materials with not curved surface is offered on the basis of the classical Stefan problem. Asymptotic solution of single-phase problem is obtained at high values of drying time.*

***Key words:*** *temperature, Stefan problem, heat of vaporization, specific heat, layer of dried material.*

**Горлов Александр Семенович**, кандидат технических наук, доцент.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.
E-mail: belgoras@mail.ru

**Петрашев Владимир Иванович**, старший преподаватель.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.
Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.
E-mail: petrashev_v@mail.ru