

Никулин А.И., канд. техн. наук, доц.,  
Обернихин Д.В., аспирант

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАПЕЦИЕВИДНОГО СЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

nikulin137@yandex.ru

На основе модифицированного варианта нелинейной деформационной модели силового сопротивления железобетона разработана методика для определения трещиностойкости изгибаемых элементов трапецевидного сечения. Приведены аналитические зависимости, используемые для описания нелинейных диаграмм состояния бетона и арматуры. Для удобства практического применения предлагаемой методики расчета приведены алгебраические выражения, обеспечивающие определение интегральных геометрических характеристик эпюр напряжений в сжатой и растянутой зонах бетона рассматриваемого трапецевидного сечения. Учитывая, что частным случаем трапецевидного сечения является прямоугольник, то методика расчета может использоваться для теоретического определения трещиностойкости сечений изгибаемых железобетонных элементов как прямоугольной, так и трапецевидной формы. Для сопоставления расчётных величин изгибающих моментов, соответствующих стадии трещинообразования железобетонных элементов по нормальному сечению, составлен алгоритм, реализованный в программе расчёта для персонального компьютера. С её помощью были выполнены численные исследования, некоторые результаты которых представлены в статье.

**Ключевые слова:** трещиностойкость, деформационная расчетная модель, диаграммы состояния бетона, диаграммы растяжения арматуры, изгибаемый элемент, трапецевидное сечение, численный эксперимент.

Наряду с железобетонными балками прямоугольного поперечного сечения в практике проектирования нередко встречаются элементы других форм, в том числе трапецевидные. При этом в учебной и научной литературе приводятся методики и примеры расчетов по двум группам предельных состояний в основном для элементов прямоугольного, таврового и двутаврового сечений [1, 2, 3, 4]. Чтобы восполнить этот пробел, в данной работе представлена методика расчета трещиностойкости изгибаемых железобетонных элементов трапецевидного сечения на основе применения нелинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры [5, 6].

Диаграммы состояния бетона при сжатии и растяжении принимаются без ниспадающих участков [5] и характеризуются следующими параметрами: начальным модулем упругости  $E_{b2}$ , предельными сопротивлениями сжатию  $R_b$  и растяжению  $R_{bt}$ , а также соответствующими предельными относительными деформациями  $\varepsilon_{bu}$  и  $\varepsilon_{btu}$  (рис. 1).

Для аналитического описания диаграмм сжатия и растяжения бетона используем дробно-рациональную функцию следующего вида:

$$\sigma_i = \frac{E_{b2} \varepsilon_i (1 + D_j \varepsilon_i)}{1 + C_j \varepsilon_i}, \quad (1)$$

где  $E_{b2}$  – начальный модуль упругости бетона, общий для неоднородного сжатия и растяжения (см. рис. 1);  $D_j$ ,  $C_j$  – параметры нелинейности деформирования бетона при неоднородном сжатии и растяжении, получаемые путем трансформирования исходных (эталонных) диаграмм на основе использования соответствующих энергетических критериев разрушения бетона ( $j=b2$  – для диаграмм неоднородного сжатия,  $j=bt2$  – то же, растяжения);  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  – текущие значения напряжений и деформаций сжатия ( $i=b$ ) и растяжения ( $i=bt$ ).

Подробная методика определения неизвестных величин ( $E_{b2}$ ,  $D_{b2}$ ,  $C_{b2}$ ,  $D_{bt2}$ ,  $C_{bt2}$ ,  $\varepsilon_{bu}$ ,  $\varepsilon_{btu}$ ) представлена в работе [5].

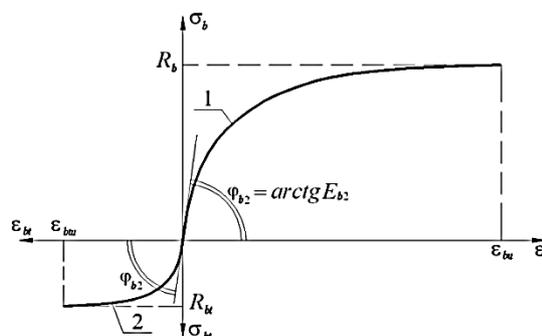


Рис. 1. Диаграммы деформирования бетона при неоднородном сжатии (кривая 1) растяжении (кривая 2)

Диаграмма растяжения арматуры принята с физической площадкой текучести (рис. 2).

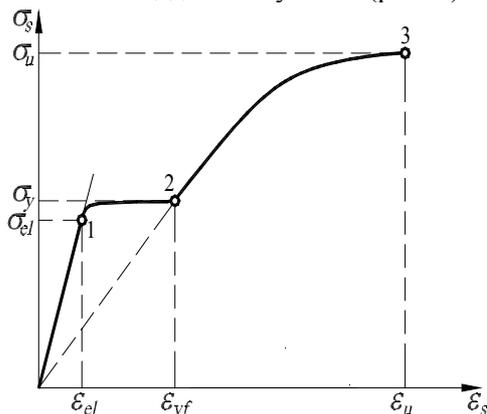


Рис. 2. Диаграмма растяжения арматуры с физической площадкой текучести

Для её описания применяется кусочная функция, состоящая из одного линейного и двух нелинейных уравнений вида (1):

при  $0 < \epsilon_s \leq \epsilon_{el}$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \quad (2)$$

при  $\epsilon_{el} < \epsilon_s \leq \epsilon_{yf}$

$$\sigma_s = \sigma_{el} + \frac{E_s (\epsilon_s - \epsilon_{el}) [1 + D_{s1} (\epsilon_s - \epsilon_{el})]}{1 + C_{s1} (\epsilon_s - \epsilon_{el})} \quad (3)$$

при  $\epsilon_{yf} < \epsilon_s \leq \epsilon_u$

$$\sigma_s = \sigma_y + \frac{E_{s2} (\epsilon_s - \epsilon_{yf}) [1 + D_{s2} (\epsilon_s - \epsilon_{yf})]}{1 + C_{s2} (\epsilon_s - \epsilon_{yf})} \quad (4)$$

где  $E_{sn}$  – начальный модуль упругости арматуры;  $\sigma_{el}$ ,  $\epsilon_{el}$  – предел упругости и соответствующая относительная деформация арматуры;  $\sigma_y$  – предел текучести арматуры;  $\epsilon_{yf}$  – относительная деформация в конце площадки текучести (см. т. 2 на рис. 2);  $\sigma_u$ ,  $\epsilon_u$  – временное сопротивление и предельная относительная деформация при разрыве арматуры;  $C_{s1}$ ,  $D_{s1}$ ,  $C_{s2}$ ,  $D_{s2}$  – параметры нелинейности кусочной функции, описывающей второй и третий участки диаграммы;  $E_{s2}$  – модуль упругости арматуры в начальной точке третьего участка.

Зависимости для определения неизвестных параметров кусочной функции ( $C_{s1}$ ,  $D_{s1}$ ,  $C_{s2}$ ,  $D_{s2}$ ,  $E_{s2}$ ) представлены в работе [5].

При разработке методики расчета трещиностойкости сечений изгибаемых железобетонных элементов трапецевидной формы используем: уравнения равновесия, условия линейного распределения деформаций по сечению, а также нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры.

Расчетная схема изгибаемого железобетонного элемента трапецевидного поперечного сечения на стадии трещинообразования представлена на рис. 3.

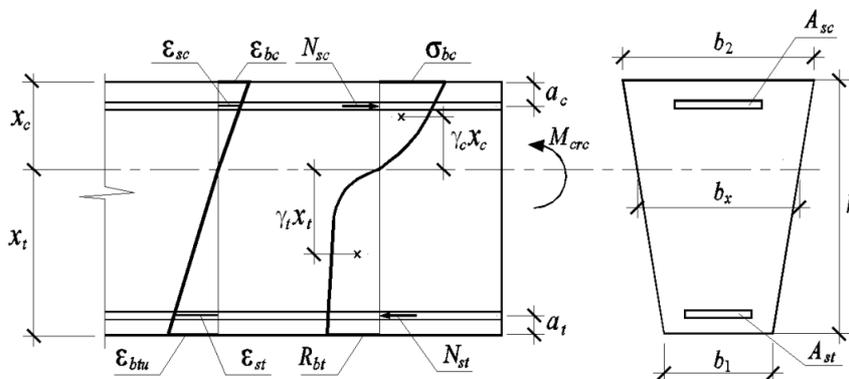


Рис. 3. Схема распределения деформаций, напряжений и усилий в нормальном сечении изгибаемого железобетонного элемента трапецевидной формы на стадии трещинообразования

Ее аналитическое отображение приводит к следующим группам уравнений.

Уравнения равновесия в традиционной форме их записи имеют вид:

$$0,5(b_2 + b_x) x_c \omega_c \sigma_{bc} + \sigma_{sc} A_{sc} - 0,5(b_1 + b_x) x_t \omega_t R_{bt} - \sigma_{st} A_{st} = 0 \quad (5)$$

$$M_{crc} = 0,5(b_2 + b_x) x_c^2 \omega_c \gamma_c \sigma_{bc} + \sigma_{sc} A_{sc} (x_c - a_c) + 0,5(b_1 + b_x) x_t^2 \omega_t \gamma_t R_{bt} + \sigma_{st} A_{st} (x_t - a_t) \quad (6)$$

где  $M_{crc}$  – искомый изгибающий момент, соответствующий началу этапа трещинообразования сечения железобетонного элемента;  $\sigma_{bc}$  – величина фибрового напряжения бетона в сжатой зоне сечения;  $\omega_c$ ,  $\omega_t$ ,  $\gamma_c$ ,  $\gamma_t$  – интегральные геометрические характеристики

эпюр напряжений в сжатой и растянутой зонах бетона;  $x_c$ ,  $x_t$  – высоты сжатой и растянутой зон бетона;  $\sigma_{sc}$ ,  $\sigma_{st}$  – напряжения в сжатой и растянутой арматуре;  $b_1$ ,  $b_2$  – ширина, соответственно, нижней и верхней грани трапецевидного сечения элемента;  $h$  – высота

сечения элемента;  $A_{sc}$ ,  $A_{st}$  – площади сжатой и растянутой арматуры;  $a_c$ ,  $a_t$  – расстояния от верхней и нижней грани сечения до центров тяжести сжатой и растянутой арматуры;  $b_x$  – ширина сечения на уровне нейтральной оси.

Для определения ширины ( $b_x$ ) трапецевидного сечения элемента на уровне его нейтральной оси используется выражение:

$$b_x = b_1 + (b_2 - b_1) \cdot \left(1 - \frac{x_c}{h}\right) \quad (7)$$

$$\omega_c = \frac{\frac{D_{b2} \varepsilon_{bc}}{2} \left( \frac{b_2 h}{x_c} - \frac{b_2 - b_1}{3} \right) + \left(1 - \frac{D_{b2}}{C_{b2}}\right) \times \varepsilon_c}{\frac{E_{b2}}{\sigma_{bc} C_{b2}} \left( \frac{b_2 h}{x_c} - \frac{b_2 - b_1}{2} \right)} \times \left[ \frac{b_2 - b_1}{2} + \left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{b2} \varepsilon_{bc})}{C_{b2} \varepsilon_{bc}}\right) \times \left( \frac{b_2 h}{x_c} - (b_2 - b_1) \cdot \left(1 + \frac{1}{C_{b2} \varepsilon_{bc}}\right) \right) \right] \quad (8)$$

$$\gamma_c = \frac{\frac{D_{b2} \varepsilon_{bc}}{3} \left( \frac{b_2 h}{x_c} - \frac{b_2 - b_1}{4} \right) + \left(1 - \frac{D_{b2}}{C_{b2}}\right) \times \left[ \frac{b_2 h}{2 x_c} - \frac{b_2 - b_1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{C_{b2} \varepsilon_{bc}} \right) - \frac{1}{C_{b2} \varepsilon_{bc}} \right]}{\left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{b2} \varepsilon_{bc})}{C_{b2} \varepsilon_{bc}}\right) \times \left( \frac{b_2 h}{x_c} - (b_2 - b_1) \times \left(1 + \frac{1}{C_{b2} \varepsilon_{bc}}\right) \right)} \left/ \left[ \frac{D_{b2} \varepsilon_{bc}}{2} \left( \frac{b_2 h}{x_c} - \frac{b_2 - b_1}{3} \right) + \left(1 - \frac{D_{b2}}{C_{b2}}\right) \times \left[ \frac{b_2 - b_1}{2} + \left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{b2} \varepsilon_{bc})}{C_{b2} \varepsilon_{bc}}\right) \times \left( \frac{b_2 h}{x_c} - (b_2 - b_1) \times \left(1 + \frac{1}{C_{b2} \varepsilon_{bc}}\right) \right) \right] \right. \quad (9)$$

$$\omega_t = \frac{\frac{D_{bt2} \varepsilon_{btu}}{2} \left( \frac{b_1 h}{x_t} + \frac{b_2 - b_1}{3} \right) + \left(1 - \frac{D_{bt2}}{C_{bt2}}\right) \times \varepsilon_t}{\frac{E_{b2}}{R_{bt} C_{bt2}} \left( \frac{b_1 h}{x_t} + \frac{b_2 - b_1}{2} \right)} \times \left[ \left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{bt2} \varepsilon_{btu})}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \times \left( \frac{b_1 h}{x_t} + (b_2 - b_1) \cdot \left(1 + \frac{1}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \right) - \frac{b_2 - b_1}{2} \right] \quad (10)$$

$$\gamma_t = \frac{\frac{D_{bt2} \varepsilon_{btu}}{3} \left( \frac{b_1 h}{x_t} + \frac{b_2 - b_1}{4} \right) + \left(1 - \frac{D_{bt2}}{C_{bt2}}\right) \times \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}} \left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{bt2} \varepsilon_{btu})}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \right]}{\left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{bt2} \varepsilon_{btu})}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \times \left( \frac{b_1 h}{x_t} + (b_2 - b_1) \cdot \left(1 + \frac{1}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \right)} \left/ \left[ \frac{D_{bt2} \varepsilon_{btu}}{2} \left( \frac{b_1 h}{x_t} + \frac{b_2 - b_1}{3} \right) + \left(1 - \frac{D_{bt2}}{C_{bt2}}\right) \times \left[ \left(1 - \frac{\text{Ln}(1 + C_{bt2} \varepsilon_{btu})}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \times \left( \frac{b_1 h}{x_t} + (b_2 - b_1) \cdot \left(1 + \frac{1}{C_{bt2} \varepsilon_{btu}}\right) \right) \right] \right. \quad (11)$$

где  $\varepsilon_{bc}$ ,  $\varepsilon_{btu}$  – относительные фибровые деформации, соответственно, в сжатой и растянутой зонах сечения изгибаемого железобетонного элемента.

С учетом принятой гипотезы плоских сечений для рассматриваемого железобетонного элемента записываются следующие условия деформаций:

Коэффициенты полноты эпюр напряжений в сжатой и растянутой зонах бетона ( $\omega_c$ ,  $\omega_t$ ) и относительные расстояния от нейтральной оси до центров тяжести соответствующих эпюр ( $\gamma_c$ ,  $\gamma_t$ ) находятся с помощью следующих зависимостей, полученных авторами применительно к трапецевидному поперечному сечению изгибаемого железобетонного элемента:

$$\frac{\varepsilon_{btu}}{x_t} = \frac{\varepsilon_{bc}}{x_c} \quad (12)$$

$$x_t = h - x_c \quad (13)$$

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{\varepsilon_{bc}} = 1 - \frac{a_c}{x_c} \quad (14)$$

$$\frac{\varepsilon_{st}}{\varepsilon_{btu}} = 1 - \frac{a_t}{x_t}, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_{sc}$ ,  $\varepsilon_{st}$  – относительные деформации сжатой и растянутой арматуры.

Величину фибрового напряжения бетона  $\sigma_{bc}$  получаем с использованием зависимости (1), описывающей диаграмму деформирования бетона при неоднородном сжатии, а неизвестные напряжения в сжатой и растянутой арматуре  $\sigma_{sc}$ ,  $\sigma_{st}$  находятся с помощью универсальной кусочной функции (2)...(4), принятой для описания диаграмм деформирования арматурных сталей с физической площадкой текучести.

Таким образом, получена замкнутая система разрешающих уравнений для определения НДС изгибаемого железобетонного элемента трапециевидного сечения на стадии его трещинообразования. Поскольку ряд зависимостей носит нелинейный характер, то их численная реализация производится с использованием итерационных процедур.

Для проведения качественной и количественной оценки результатов, получаемых в рамках предлагаемой методики расчета трещиностойкости рассматриваемых элементов, был составлен соответствующий алгоритм и разработана программа «Balka\_8T» для персонального компьютера, с помощью которой проведены численные исследования.

Принимаем во внимание, что частным случаем трапециевидного сечения является прямоугольник. Поэтому методика, алгоритм и

программа расчета «Balka\_8T» могут использоваться для теоретического определения трещиностойкости сечений изгибаемых железобетонных элементов как прямоугольной, так и трапециевидной формы при любой прочности бетона и различном содержании сжатой и растянутой арматуры.

В качестве исследуемого эталонного образца был принят изгибаемый железобетонный элемент с размерами поперечного сечения прямоугольной формы  $b \times h = 300 \times 450$  мм. Сравнимый железобетонный элемент трапециевидного сечения имеет такую же высоту ( $h = 450$  мм) и ширину верхней грани ( $b_2 = 300$  мм). При этом ширина нижней грани ( $b_1$ ) принята двух типов: 150 мм и 100 мм. В первом случае ( $b_1 = 150$  мм) экономия бетона по сравнению с эталонным прямоугольным элементом достигает 25 %, а во втором случае ( $b_1 = 100$  мм) – 33 %. В ходе численного эксперимента варьировали следующими исходными данными: классами бетона (В15, В30, В50, В70); процентным содержанием растянутой арматуры класса А400 (0,5 %, 1,0 %, 3,0 %, 5,0 %). В сжатой зоне для всех образцов принята арматура класса А240 с постоянной площадью (0,5 %). В расчетах использовались нормативные характеристики бетона и арматуры с учетом кратковременного нагружения железобетонных элементов статической нагрузкой. В итоге общий объем рассчитываемых образцов составил 48. Основные результаты численных исследований представлены в таблице 1.

Таблица 1

**Расчетные значения трещиностойкости сечений изгибаемых железобетонных элементов прямоугольной и трапециевидной формы**

Класс бетона	Процент армирования, %	Трещиностойкость сечения, кН·м			$\frac{M_{cr,2}}{M_{cr,1}}$ , %	$\frac{M_{cr,3}}{M_{cr,1}}$ , %
		Прямоугольное сечение ( $M_{cr,1}$ )	Трапециевидное сечение ( $b_1 = 150$ мм) ( $M_{cr,2}$ )	Трапециевидное сечение ( $b_1 = 100$ мм) ( $M_{cr,3}$ )		
В15	0,5	29,25	19,00	16,00	65,0	54,7
	1,0	35,09	25,35	22,50	72,2	64,1
	3,0	57,15	48,97	46,54	85,7	81,4
	5,0	77,35	70,20	68,05	90,8	88,0
В30	0,5	43,34	26,79	21,99	61,8	50,7
	1,0	49,86	33,91	29,26	68,0	58,7
	3,0	74,96	60,91	56,79	81,2	75,8
	5,0	98,64	85,99	82,25	87,2	83,4
В50	0,5	58,14	34,96	28,27	60,1	48,6
	1,0	65,44	42,94	36,44	65,6	55,7
	3,0	93,75	73,52	67,63	78,4	72,1
	5,0	120,80	102,31	96,89	84,7	80,2
В70	0,5	69,44	41,11	32,97	59,2	47,5
	1,0	77,32	49,74	41,81	64,3	54,1
	3,0	108,00	82,98	75,73	76,8	70,1

	5,0	137,49	114,45	107,73	83,2	78,4
--	-----	--------	--------	--------	------	------

Анализ полученных результатов, позволил выявить следующие закономерности:

– для всех рассмотренных классов бетона и при любом армировании растянутой зоны трещиностойкость элементов трапециевидного сечения оказалась на 9,2...52,5 % ниже, чем у эталонных образцов;

– трещиностойкость трапециевидных сечений, у которых ширина нижней грани принята 150 мм, значительно больше, чем у образцов с узкой гранью ( $b_1 = 100$  мм). Наибольшие различия (10,3... 11,7 %) наблюдаются у слабоармированных элементов, а наименьшие (2,8...4,8 %) – у перearмированных;

– увеличение в заданных пределах процента армирования трапециевидных сечений при неизменной прочности бетона приводит к существенному повышению трещиностойкости. При этом наибольший рост значений наблюдается у низкопрочного бетона (В15) – в 4,25 раза, а для высокопрочного бетона (В70) этот рост несколько меньше – в 3,27 раза. Эта же тенденция сохраняется для значений  $M_{кр,2}$ , у которых для трапециевидных образцов из бетона В15 с увеличением содержания растянутой арматуры моменты трещинообразования повышаются в 3,69 раза, а для наиболее прочного из рассмотренных в численном эксперименте бетона В70 – в 2,78 раза. Для прямоугольных сечений указанные соотношения искомых величин несколько ниже и составляют, соответственно, 2,64 и 1,98 раза;

– увеличение прочности бетона для всех рассмотренных элементов приводит к повышению трещиностойкости их сечений в 1,58... 2,37 раза. При этом для малоармированных (0,5 %) образцов параметры роста относительных величин моментов трещинообразования ближе к максимальному значению их общего диапазона – 2,06...2,37 раза, а для перearмированных (5,0 %) сечений аналогичные величины ближе к минимальному значению их общего диапазона – 1,58...1,78 раза.

В заключение следует отметить, что в рамках развития данной темы авторы планируют выполнить аналогичные исследования для оценки влияния формы трапециевидных сечений на деформативность изгибаемых железобетонных конструкций, что позволит добиться оптимальных технико-экономических результатов при проектировании конструкций рассматриваемого типа.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адищев В.В., Митасов В.М. Энергетический подход к моделированию процесса образования трещин в изгибаемых железобетонных элементах // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 4. С. 26–31.
2. Алмазов В.О. Проектирование железобетонных конструкций по Еuronормам: научное издание.– М.: Изд-во АСВ, 2011. 216 с.
3. Меркулов С.И. Развитие теории конструктивной безопасности объектов в условиях коррозионных воздействий // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2014. № 3. С. 44–46.
4. Меркулов С.И., Татаренков А.И. Оценка резерва несущей способности эксплуатируемых железобетонных конструкций // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2013. № 6. С. 66–69.
5. Никулин А.И. К построению расчетной модели для определения трещиностойкости железобетонных балок на основе энергетических соотношений // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Строительство и транспорт. 2004. № 3–4. С. 78–85.
6. Обернихин Д.В., Никулина Ю.А. Расчет прочности изгибаемых железобетонных элементов трапециевидного сечения на основе применения нелинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры // Актуальные вопросы науки и техники: Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. Вып. 2. Самара: ИЦРОН, 2015. С. 122–124.

**Nikulin A.I., Obernih D.V.**

### **BENDING CRACK RESISTANCE REINFORCED CONCRETE ELEMENTS OF TRAPEZOIDAL CROSS-SECTION BASED ON THE APPLICATION OF NONLINEAR DEFORMATION MODELS**

*Based on a modified version of nonlinear deformation model of power resistance reinforced concrete methodology for determination of bending crack resistance reinforced concrete elements of trapezoidal cross-section. Analytical dependencies are used to describe the nonlinear diagrams of condition of concrete and Rebar. For the convenience of the practical application of the proposed methodology are algebraic expressions, providing the definition of integral geometry diagrams of stresses in compressed and stretched zones of concrete reporting trapezoidal cross-section. Considering that the special case of trapezoidal cross-section is a rectangle, the method of calculation can be used for theoretical definitions section crack resistance of steel reinforced concrete elements as rectangular and trapezoid form. For comparison of*

---

*calculated values of bending moments corresponding to the stage of cracking of reinforced concrete elements to normal cross-section is an algorithm implemented in the calculation program for the personal computer. It was performed numerical research, some results of which are presented in the article.*

**Keywords:** *crack resistance, deformation calculation model, concrete state diagram, chart stretching reinforcement, bent elements, trapezoidal cross-section, numerical experiment.*

---

**Никулин Александр Иванович**, канд. техн. наук, доцент кафедры строительства и городского хозяйства.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

E-mail: nikulin137@yandex.ru

**Обернихин Дмитрий Вячеславович**, аспирант кафедры строительства и городского хозяйства.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

E-mail: pinky2601@mail.ru