***Толстопятов С.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.***
***Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова***
***Голованова Е.В., канд. физ.-мат. наук, доц.***
***Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина***

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТУХАНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

**olga160@yandex.ru**

*Построена математическая модель, описывающая процесс распространения и затухания высокочастотных (ультразвуковых) волн малой амплитуды в упруго пластическом теле. Показана возможность экспресс-оценки одномерного напряженно-деформированного состояния методом затухания ультразвука. Исследована зависимость величины декремента затухания высокочастотных колебаний от текущих и остаточных деформаций в условиях одноосного напряженно-деформированного состояния.*

***Ключевые слова:*** *математическая модель, ультразвук, затухание, напряженно-деформированное состояние, прочностные характеристики, пористость, дислокации.*

В работе предложен математический метод изучения затухания ультразвуковых волн малой амплитуды под действием одноосных растягивающих напряжений. Математическое моделирование затухания ультразвука в поликристаллическом твердом теле сводится к рассмотрению рассеяния упругих волн различными частицами – включениями, поэтому среда предполагается упругой, но с различными включениями. Анализ выполненных ранее экспериментов и результаты работ [1, 2] показал, что в пластически деформированном теле наблюдается эффект затухания ультразвуковых волн. Причем, если к телу приложены такие нагрузки, при которых реализуется напряженно-деформированное состояние, выходящее за пределы линейной упругости, то затухание догрузочных волн (ультразвуковых, малой амплитуды) растет с увеличением пластических деформаций. Следовательно, по отношению к ультразвуковым догрузочным волнам пластически деформированное тело ведет себя как сплошная среда, поглощающая высокочастотные волны. Таким образом, в основе построения математической модели лежат следующие предположения:

1. «догрузочные» волны в недеформированном (или упруго деформированном) теле распространяются со скоростью звука;
2. в пластически деформированном теле затухание «догрузочных» волн увеличивается с ростом напряжений;
3. статические диаграммы $\sigma-\varepsilon$ одноосного состояния существуют и имеют выраженный упругий участок.

С учетом сделанных предположений математическая модель одномерного напряженно-деформированного состояния образца описывается следующей системой уравнений:

$$\partial \ni \frac{¿}{\partial t} = f\left(¿,\ \sigma,\ \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)$$
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$
$$\partial \ni \frac{¿}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$¿$$
$$|¿|¿¿¿$$
$$¿ \qquad (1)$$

Первое уравнение является определяющим соотношением, второе – уравнением движения без учета массовых сил, третье – уравнением совместности кинематических полей скорости и деформаций.

Пусть $\sigma_0,\ \ni_0 ¿$ – характеризуют основное состояние в растянутом приложенными силами образце, поэтому $\sigma_0,\ \ni_0 ¿$ – это некоторая точка, взятая на статической диаграмме « $\sigma-\ni ¿$ », а $\sigma^{¿}\ и\ \ni^{¿} ¿$ – это малые «догрузочные» напряжения и деформации, характеризующие быстрый процесс изменения основного состояния из-за наложенных на него ультразвуковых волн, т.е. $¿ = ¿_0 + ¿^*$; $\sigma = \sigma_0 + \sigma^*$. Обозначим частную производную штрихом вверху, а индексом внизу переменную, по которой ведется дифференцирование, точкой вверху – частную производную по t.

Заменяя в преобразованиях $\partial \ni \frac{¿}{\partial t}$ на $f$, согласно первому уравнению (1), будем иметь:

$$\partial^2 \ni^{¿} \frac{¿}{\partial t^2} = f''_{\ni\ni} f \ni^{¿} + f''_{\ni\sigma} f \sigma^{¿} + f''_{\ni\dot\sigma} f \dot\sigma^{¿} + f'^{¿}_{\ni} ¿ + f'_{\sigma} f'_{\ni} \sigma^{¿} + f'_{\dot\sigma} f'_{\ni} \dot\sigma^{¿} + f''_{\sigma\ni} \dot\sigma \ni^{¿} + f''_{\sigma\sigma} \dot\sigma \sigma^{¿} +$$

$$+ f''_{\sigma\dot\sigma}\dot\sigma\dot\sigma^{¿} + f'_{\sigma}\dot\sigma'_{э}э^{¿} + f'_{\sigma}\dot\sigma'_{\sigma}\sigma^{¿} + f'_{\sigma}\dot\sigma'_{\sigma}\sigma^{¿} + f''_{\dot\sigma э}\ddot\sigma\sigma^{¿} + f''_{\dot\sigma\sigma}\ddot\sigma\sigma^{¿} + f''_{\dot\sigma\dot\sigma}\ddot\sigma\dot\sigma^{¿} + f'_{\dot\sigma}\ddot\sigma'_{э}э^{¿} +$$
$$f'_{\dot\sigma}\ddot\sigma'_{\sigma}\sigma^{¿} + f'_{\dot\sigma}\ddot\sigma'_{\dot\sigma}\dot\sigma^{¿} \quad .$$

В этом соотношении все величины не отмеченные «звездочкой» относятся к основному статическому состоянию. Поэтому, $\dot\sigma'_{э} = 0;$ $\dot\sigma_{\sigma} = 0;$ $\dot\sigma'_{\dot\sigma} = 1;$ $\ddot\sigma'_{\dot\sigma} = 0;$ $\ddot\sigma'_{э} = 0;$ $\dot\sigma = 0;$ $\ddot\sigma = 0$ . Так как скорость распространения догрузочных импульсов совпадает со стержневой скоростью, имеем, что $f'_{\dot\sigma} \approx \dfrac{1}{E}$ ,

где E – модуль Юнга. С учетом этого равенства получим

$$\frac{\partial^2 э^{¿}}{\partial t^2} = ¿ \quad f''_{ээ} f^2 + f'_{э} ¿ \quad э^{¿} + (f''_{э\sigma} f + f'_{\sigma} f'_{э})\sigma^{¿} + \left(f''_{э\dot\sigma} f + \frac{1}{E} f'_{э} + f'_{\sigma}\right)\dot\sigma^{¿} + \frac{1}{E}\ddot\sigma^{¿}$$

Введя обозначения $f''_{ээ} f^2 + f'_{э} ¿ \equiv \varepsilon,$ $f''_{э\sigma} f + f'_{\sigma} f'_{э} \equiv \beta 2,$ $f''_{э\dot\sigma} f + \dfrac{1}{E} f'_{э} + f'_{\sigma} \equiv 2\alpha,$ получим линеаризованное уравнение для «догрузочных» деформаций в виде

$$\frac{\partial^2 э^{¿}}{\partial t^2} = \varepsilon э^{¿} + \beta^2 \sigma^{¿} + 2\alpha\dot\sigma^{¿} + \frac{1}{E}\ddot\sigma^{¿} \tag{2}$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 э^{¿}}{\partial t^2} = \varepsilon э^{¿} + \frac{\beta^2}{E}\sigma^{¿} + \frac{2\alpha}{E}\dot\sigma^{¿} + \frac{1}{E}\ddot\sigma^{¿}$$

Проведя линеаризацию полученного выше уравнения движения:

$$\rho\left(f'_{э} f + f'_{\sigma}\dot\sigma + f'_{\dot\sigma}\ddot\sigma\right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad ,$$

найдем

$$э^{¿} = \frac{1}{\rho\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial x^2} - \frac{1}{E\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{\varepsilon}\sigma^{¿} - \frac{2\alpha}{\varepsilon}\frac{\partial \sigma^{¿}}{\partial t} \tag{2'}$$

Это соотношение определяет догрузочные деформации через напряжения. Уравнения (2) и (2)' линейно связывают между собой догрузочные напряжения и деформации. Поэтому из этих соотношений можно получить отдельные уравнения для каждой из догрузочных величин. Выполняя преобразование уравнения (2) с использованием уравнения (2)', получим уравнение четвертого порядка для догрузочных напряжений:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{\rho\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial x^2} - \frac{1}{E\varepsilon}\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{\varepsilon}\sigma^{¿} - \frac{2\alpha}{\varepsilon}\frac{\partial \sigma^{¿}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial x^2}$$

Из этого уравнения следует окончательный вид линеаризованного уравнения для догрузочных волн напряжений:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial x^2} - \rho\left[\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial t^2} + \beta^2\sigma^{¿} + 2\alpha\frac{\partial \sigma^{¿}}{\partial t}\right]\right\} = \frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial x^2} \tag{3}$$

Полагая $\sigma^{¿} = A\exp(\omega t + \kappa x)$ , получим спектральное уравнение:

$$k^2 - \rho\left(\frac{\omega^2}{E} + 2\alpha\omega + \beta^2\right) = \frac{k^2\varepsilon}{\omega^2}$$

На частотах $\omega \approx ¿$ 10 МГц спектральное уравнение принимает вид

$$k^2 - \rho\left(\frac{\omega^2}{E} + 2\alpha\omega + \beta^2\right) = 0$$

Следовательно, в области высоких частот уравнение (3) может быть аппроксимировано телеграфным уравнением Г. Бэйтмана [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta^2\right)\sigma = c^2\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$$

Уравнение (3), описывает процесс распространения ультразвуковых волн нагружения в пластически деформированном образце и доказывает зависимость от $\alpha$ и

$\beta$, а следовательно, от функции $f\left(э, \sigma, \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}\right)$ в определяющем соотношении.

Достаточным для выполнения сформулированных выше положений 1–3 является выбор определяющего соотношения вида:

$$\frac{\partial э}{\partial t} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + f(э, \sigma)$$

Тогда получим следующую систему уравнений математической модели:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$
$$\frac{\partial э}{\partial t} = \frac{1}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \delta f(э, \sigma)$$
$$\frac{\partial э}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\text{¿}\quad \{\text{¿}\{\text{¿¿}\quad \text{¿} \qquad (4)$$

Проведя повторное дифференцирование второго уравнения системы (4), получим:

$$\ddot{э} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + f'_э\dot{э} + f'_\sigma\dot{\sigma} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + f'_э\dot{э} + f'_\sigma(E\dot{э} - Ef) = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + (f'_э + Ef'_\sigma)\dot{э} - Ef\{f'_\sigma\text{¿}.$$

Линеаризуя это уравнение с использованием обозначений $f'_э + Ef'_\sigma \equiv 2\alpha$, $E(f'_\sigma f'_э + ff''_{\sigma э}) \equiv \xi^2$, $f^{\text{¿}2}_\sigma + ff''_{\sigma\sigma} \equiv \eta$ в окрестности некоторого состояния, соответствующего произвольной точке на диаграмме «э – σ» в пластической области получим:

$$\ddot{э}^{\text{¿}} - 2\alpha\dot{э}^{\text{¿}} + \xi^2 э^{\text{¿}} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^{\text{¿}} - E\eta\sigma^{\text{¿}}$$

Используя обозначение $p \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}$ для оператора дифференцирования по времени, получаем символическую форму записи уравнения в виде:

$$(p^2 - 2\alpha p + \xi^2)э^{\text{¿}} = \left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\sigma^{\text{¿}} \qquad (5)$$

Дифференцирование первого и третьего уравнений системы (4) дает соотношение:

$$\rho\ddot{э}^{\text{¿}} = \sigma''_{xx} \Rightarrow \rho p^2 э^{\text{¿}} = \sigma''_{xx}.$$

Воздействуя на это соотношения оператором $\left(\dfrac{p^2}{E} - E\eta\right)$, получим:

$$\rho p^2\left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)э^{\text{¿}} = \left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\sigma^{\text{¿}\,''}_{xx} \qquad (5)'$$

Уравнения (5), (5)' линейно связывают между собой догрузочные деформации и напряжения. Поэтому из них следуют уравнения, отдельно определяющие каждую из догрузочных величин.

Например, из (5) и (5)' имеем уравнение для догрузочных деформаций в ультразвуковой волне:

$$(p^2 - 2\alpha p + \xi^2)\,\text{¿}^{\text{¿}\,''}_{xx} = \left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\sigma^{\text{¿}\,''}_{xx} \Rightarrow$$
$$\rho\, p^2\left(\frac{p^2}{E} - E\eta\right)\text{¿}^{\text{¿}} = (p^2 - 2\alpha p + \xi^2)\,\text{¿}^{\text{¿}\,''}_{xx} \qquad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой уравнение для «догрузочных» деформаций, решение которого найдем в виде $\text{¿}^{\text{¿}} = A\exp(\omega t + \kappa x)$. Из (6) следует спектральное уравнение и его решение в виде зависимости $k^2 = k^2(\omega^2)$:

$$\rho\omega^2\left(\frac{\omega^2}{E} - E\eta\right) = (\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2)\,\kappa^2 \Rightarrow \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2\left(\dfrac{\omega^2}{E} - E\eta\right)}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2}.$$

Тождественно преобразуем правую часть спектрального соотношения:

$$\frac{\rho\omega^2\left(\dfrac{\omega^2}{E} - E\eta\right)}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2} = \frac{\rho}{E}\omega^2 + \frac{2\alpha}{E}\rho\omega + \left(\frac{4\alpha^2\rho}{E} - \rho E\eta - \frac{\rho\xi^2}{E}\right) + \frac{C_1\omega}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2} + \frac{C_2}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2}; \qquad (7)$$

$$C_1 = \frac{8\alpha^3\rho}{E} - \frac{4\alpha\rho\xi^2}{E} - 2\alpha\rho E\eta; \quad C_2 = \frac{\rho\xi^4}{E} + \rho\xi^2 E\eta - \frac{4\xi^2\alpha^2\rho}{E}.$$

Отсюда следует, что в области высоких частот $\omega \to \infty$ из (7) справедливо приближенное спектральное уравнение:

$$\kappa^2 \approx \frac{\rho}{E}\left[\omega^2 + 2\alpha\omega + \left(4\alpha^2 - E^2\eta - \xi^2\right)\right].$$

Это означает, что процесс затухания ультразвуковых волн в одномерном континууме (6) такой же, как процесс затухания волн в уравнении Бэйтмана.

Для экспериментальной аттестации предложенной математической модели необходимо также получить уравнения для «догрузочных» напряжений и при $\omega\to\infty$ сравнить оба спектральных уравнения.

Из второго уравнения системы (4) имеем:

$$\ddot{¿} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + f_{¿}^{'}\dot{¿} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + f_{¿}^{'}\left(\frac{\sigma}{E} + f\right) + \dot{\sigma} f^{'} \sigma = \frac{1}{E}\ddot{\sigma} + \left(\frac{1}{E}f_{¿}^{'} + f_{\sigma}^{'}\right)\dot{\sigma} + f_{¿}^{'} f$$

Линеаризуя это уравнение в окрестности состояния ( $¿_0, \sigma_0$ ),получим

$$¿ \ni ¿ f^2 + f_{¿}^{¿}$$
$$f_{¿}^{''} \ni^{¿} ¿$$
$$\ddot{¿}^{¿} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^{¿} + \left(\frac{1}{E}f_{¿}^{'} + f_{\sigma}^{'}\right)\underset{¿}{\dot{\sigma}^{¿}} + \left(f_{¿\sigma}^{''} f + f_{\sigma}^{'} f_{¿}^{'}\right)\sigma^{¿} + ¿ \qquad (8)$$

С использованием обозначений соотношение (8) принимает следующий вид:

$$\ddot{¿}^{¿} - \gamma^{¿} \ni^{¿} = \frac{1}{E}\ddot{\sigma}^{¿} + \frac{1}{E}2\alpha\dot{\sigma}^{¿} + \frac{\xi^2}{E}\sigma^{¿} \qquad (9)$$

Поскольку из третьего уравнения системы (4) следует соотношение: $\ddot{¿} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \Rightarrow \rho\ddot{¿} = \sigma_{xx}^{''}$, то далее получаем цепочку равенств: $\ddot{¿}^{¿} - \gamma^{¿} \ni^{¿} \underset{¿}{\equiv} \left(p^2 - \gamma^{¿}\right) \ni^{¿} ¿$, $\rho\left(p^2 - \gamma^{¿}\right)\ddot{¿}^{¿} = \left(p^2 - \gamma^{¿}\right)\sigma_{xx}^{''}$ и окончательно из (9) находим уравнение распространения догрузочных волн напряжений

$$\left(p^2 - \gamma^{¿}\right)\sigma_{xx}^{''} = \rho p^2\left(\frac{1}{E}\ddot{\sigma}^{¿} + \frac{2\alpha}{E}\dot{\sigma}^{¿} + \frac{\xi^2}{E}\sigma^{¿}\right) \qquad (10)$$

Анализируя уравнение (10) по Фурье $\sigma^{¿} = A\,exp\,(\omega t + \kappa x)$, получаем спектральное уравнение:

$$\frac{\rho}{E}\omega^2\left(\omega^2 + 2\alpha\omega + \xi^2\right) = \left(\omega^2 - \gamma^{¿}\right)\kappa^2 \Rightarrow \quad \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2}{E}\left(\frac{\omega^2 + 2\alpha\omega + \xi^2}{\omega^2 - \gamma^{¿}}\right).$$

Выполняя тождественные преобразования спектрального уравнения, найдем, что:

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{E}\left(\omega^2 + 2\alpha\omega + \xi^2 + \gamma^{¿}\right) + \frac{2\alpha\rho\gamma^{¿}\omega}{E\left(\omega^2 - \gamma^{¿}\right)} + \frac{\rho\gamma^{¿}}{E\left(\omega^2 - \gamma^{¿}\right)}.$$

«Догрузочные» деформации:

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{E}\left(\omega^2 + 2\alpha\omega + 4\alpha - E^2\eta - \xi^2\right) + \frac{C_1}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2} + \frac{C_2}{\omega^2 - 2\alpha\omega + \xi^2}$$

«Догрузочные» напряжения:

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{E}\left(\omega^2 + 2\alpha\omega + \xi^2 + \gamma^{¿}\right) + \frac{2\alpha\rho\gamma^{¿}\omega}{E\left(\omega^2 - \gamma^{¿}\right)} + \frac{\rho\gamma^{¿}}{E\left(\omega^2 - \gamma^{¿}\right)}$$

Сравнение показывает, что для «догрузочных» волн каждого из двух рассмотренных типов в области высоких частот получается уравнение Бэйтмана:

$$\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial \sigma^{¿}}{\partial t} + \beta^2\sigma^{¿} = c^2\frac{\partial^2 \sigma^{¿}}{\partial x^2}.$$

Это видно из того, что при высоких частотах дисперсионные уравнения полученных уравнений и уравнений Бэйтмана совпадают.

В спектральном уравнении, соответствующем уравнению Бэйтмана:

$$\kappa^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 + 2\alpha\omega + \beta^2\right),$$

где $\alpha$ – коэффициент затухания волны.

Поэтому в уравнениях для «догрузочных» волн деформаций и напряжений переменная величина $\frac{\partial f}{\partial \ni ¿}+E\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ ¿ , обозначенная ранее как 2α, также имеет смысл удвоенного коэффициента затухания волны. Это означает, что построенная математическая модель описывает процессы затухания ультразвука в пластически деформированных средах. Для количественного сравнения теоретических результаты с экспериментальными данными, необходимо провести все необходимые оценки параметров для конкретных материалов и процессов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Толстопятов С.Н. О связи затухания ультразвука с внутренним напряжением в образце. / НИИЭинформэнергомаш. М.-1987. Деп.в НИИЭинформэнергомаше 13.05.87г. № 391-эм87.

2. Koeler J. Imperfection in Nearly Perfect Crustals./ J/ Koeler // John Wiley and Sons. 1952. P. 197.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

**Tolstopyatov S.N., Golovanova E.V.**
**MATHEMATICAL MODELING OF THE ATTENUATION OF THE OSCILLATIONS IN POLYCRYSTALLINE SOLIDS**

*A mathematical model describing the process of propagation and attenuation of high-frequency (ultrasonic) waves of small amplitude in the elastic-plastic body. The possibility of Express-evaluation of one-dimensional stress-strain state by the method of ultrasound attenuation. The dependence of the magnitude of the decrement of damping high-frequency oscillations from current and residual strains in the uniaxial stress-strain state.*

***Key words:*** *mathematical model, ultrasound, attenuation, stress-deformirovannoe condition, strength properties, porosity, dislocations*.

**Толстопятов Сергей Николаевич,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедра высшей математики.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46
E-mail: olga160@yandex.ru

**Голованова Елена Васильевна,** кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и физики.
Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина.
Адрес: Россия, 308503, п. Майский, ул. Вавилова, д. 1.
E-mail: golovanova711@mail.ru