DOI: 10.34031/article_5ca1f6340f3497.49776836

[1,]***Вендин С.В.**

[1]*Белгородский государственный аграрный университет имени В.Я. Горина*
Россия, Белгородская область, п. Майский
**E-mail: elapk@mail.ru*

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Аннотация. *Рассмотрены вопросы нестационарной диффузии в слоистых структурах. При разработке конструкций аппаратов для реализации массообменных процессов необходимо учитывать, свойства вещества и характер протекаемых процессов. Сроки проектирования значительно сокращаются, а КПД аппаратов получается выше, если удается построить хорошую физическую модель и применить математический анализ с учетом кинетики процессов. Трудности теоретического анализа и расчета массопереноса определяются сложностью механизма переноса к границе раздела фаз и от нее. Поэтому применяют упрощенные модели процессов массопереноса в которых механизм массоотдачи характеризуется сочетанием молекулярного и конвективного массопереноса. Многие важные практические задачи предполагают расчет нестационарной диффузии (второго закона Фика) для определенного объема вещества (веществ). Для качественной оценки процессов, в случае симметрии, объемные задачи можно рассматривать как одномерные задачи, т.е. зависящие от одной координаты. Предложено общее решение уравнения нестационарной диффузии для слоистых сред. При этом рассматривался случай нестационарных граничных условий третьего рода на внешней поверхности и граничных условий сопряжения четвертого рода для соприкасающихся слоев. Решение получено методом разделения переменных Фурье по собственным функциям задачи сприменением интеграла Дюамеля. Предложенная форма решения имеет явный вид и благодаря рекуррентной форме записи основных соотношений может быть полезной при численных расчетах.*

Ключевые слова: *нестационарная диффузия, закон Фика, слоистые структуры, нестационарные граничные условия третьего рода, граничные условия сопряжения четвертого рода.*

Введение. Известно, что массообменные (диффузионные) процессы характеризуются переносом одного или нескольких веществ исходной смеси из одной фазы в другую через поверхность раздела фаз. В группу процессов, которые рассматриваются, как массообменные входит молекулярная диффузия распределяемого вещества. Молекулярная диффузия определяет процессы абсорбции, перегонки (ректификации), экстракции из растворов, растворение и экстракцию из пористых тел, кристаллизацию, адсорбцию и сушку. Химические (реакционные) процессы протекают со скоростью, определяемой законами химической кинетики. В тоже время химическим реакциям сопутствует перенос массы и энергии. Поэтому скорость реакций подчиняется законам макрокинетики и определяется наиболее медленным из последовательно протекающих химического взаимодействия и диффузии [1–4].

При разработке конструкций аппаратов для реализации указанных процессов необходимо учитывать, свойства вещества и характер протекаемых процессов. Сроки проектирования значительно сокращаются, а КПД аппаратов получается значительно выше, если удается построить хорошую физическую модель и применить математический анализ с учетом кинетики процессов.

Трудности теоретического анализа и расчета массопереноса определяются сложностью механизма переноса к границе раздела фаз и от нее. Поэтому применяют упрощенные модели процессов массопереноса в которых механизм массоотдачи характеризуется сочетанием молекулярного и конвективного массопереноса. Среди моделей массопереноса следует выделить пленочную модель, модель диффузионного пограничного слоя, модель обновления поверхности фазового контакта и модифицированные модели обновленной поверхности. В любом случае основу всех моделей составляет основное уравнение массообмена, связывающее изменение концентрации вещества во времени с координатой точки в объеме вещества, а также условиями массобмена (диффузии) на свободных поверхностях и на границе соприкасающихся поверхностей с различной концентрацией вещества. Приходится идеализировать и упрощать рассматриваемую задачу, делая определенные допущения относительно начального распределения концентрации вещества и коэффициентов диффузии.

Аппараты реализующие массообменные процессы представляют собой объемные тела различной конфигурации, для которых требуется правильно подобрать геометрические размеры и технические параметры с учетом скорости протекания процессов и производительности оборудования.

Методология. Многие важные практические задачи предполагают расчет нестационарной диффузии (второго закона Фика) [1] для определенного объема вещества (веществ). Заметим, что для качественной оценки процессов, в случае симметрии, многие объемные задачи можно рассматривать как одномерные задачи, т.е. зависящие от одной координаты. В более ранних работах автора были рассмотрены аналитические решения однородной задачи нестационарной теплопроводности в слоистых структурах [5–13]. С учетом методического подхода, изложенного в этих работах, методом разделения переменных Фурье можно получить решение уравнения нестационарной диффузии для слоистых сред.

Основная часть. Ниже приведено общее решение уравнения нестационарной диффузии для слоистых сред. При этом рассматривался случай нестационарных граничных условий третьего рода на внешней поверхности и граничных условий сопряжения четвертого рода для соприкасающихся слоев.

Одномерная задача нестационарной диффузии для слоистых сред в математической постановке должна определяться следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial C_i(r,t)}{\partial t} = D_i \nabla^2 C_i(r,t),$$

$$x_{i-1} \le r \le x_i, \quad i = 1, 2, \ldots n, \qquad (1)$$

где $C_i(r,t)$, – концентрация вещества в i-м слое; D_i, – коэффициенты диффузии в i-м слое; x_0, – координаты нижней геометрической (свободной) поверхности объекта; x_n – верхней геометрической (свободной) поверхности объекта.

На внешних (свободных) поверхностях $r = x_o$, $r = x_n$ граничные условия определим как нестационарные граничные условия третьего рода:

$$\left[C_1(r,t) + h_1 \frac{\partial C_1(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_0} = \varphi_1(t), \quad \left[C_n(r,t) + h_2 \frac{\partial C_n(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_n} = \varphi_2(t) \qquad (2)$$

Граничные условия сопряжения четвертого рода концентрационных полей и концентрационных потоков для соприкасающихся слоевв общем виде определяются следующим образом:

$$\left| K_i C_i(r,t) = K_{i+1} C_{i+1}(r,t) \right|_{r=x_i}, \quad \left| D_i \frac{\partial C_i(r,t)}{\partial r} = D_{i+1} \frac{\partial C_{i+1}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=x_i} \quad i = 12,\ldots n\text{-}1, \qquad (3)$$

где K_i – константа растворимости i- го слоя,

Распределение концентрационных полей в начальный момент времени в каждом слое $C_i(r,0)$имеет вид:

$$C_i(r,0) = f_i(r), \quad i = 1, 2, \ldots n, \qquad (4)$$

где $f_i(r)$ – функция начального распределения концентрационных полей.

Искомое решение задачи (1) представим в виде суммы

$$C_i(r,t) = f_i(r) + v_i(r,t), \qquad (5)$$

где $v_i(r,t)$ – функции, которые являются решением задачи с нулевыми начальными условиями $v_i(r,0)=0$и удовлетворяют уравнениям (1)-(3).

Функции $v_i(r,t)$ можно определить интегралом Дюамеля [14, 15]:

$$v_i(r,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i(r,\tau,t-\tau)\, d\tau, \quad \text{при } t>0 \qquad (6)$$

где $\dot{v}_i(r,\tau,t)$ – решение задачи при условии, что τявляется параметром.

После преобразования функции $v_i(r,t)$ окончательно приобретают вид:

$$v_i(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\mu_{i,m}^2 D_i \int_0^t A_m(\tau) \exp(\mu_{i,m}^2 D_i \tau)\, d\tau \right] \dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m} r) \exp(-\mu_{i,m}^2 D_i t), \qquad (7)$$

где $\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m} r)$ – собственные функции задачи;

$$\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}r)=\left[\prod_{k=1}^{i}Z_k\right]\times\left[Y_1(\mu_{i,m}r)+B_{i,m}Y_2(\mu_{i,m}r)\right],\ \text{i = 1,2,…n,} \quad (8)$$

$$B_{1,m}=-\frac{Y_1(\mu_{1,m}x_0)+h_1Y_1'(\mu_{1,m}x_0)}{Y_2(\mu_{1,m}x_0)+h_1Y_2'(\mu_{1,m}x_0)}, \quad (9)$$

$$B_{i,m}=-\frac{\dfrac{D_i}{K_i}\times\dfrac{Y_1'(\mu_{i,m}x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i,m}x_{i-1})}-\dfrac{D_{i-1}}{K_{i-1}}\times\dfrac{Y_1'(\mu_{i-1,m}x_{i-1})+B_{i-1}Y_2'(\mu_{i-1,m}x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i-1,m}x_{i-1})+B_{i-1}Y_2(\mu_{i-1,m}x_{i-1})}}{\dfrac{D_i}{K_i}\times\dfrac{Y_2'(\mu_{i,m}x_{i-1})}{Y_2(\mu_{i,m}x_{i-1})}-\dfrac{D_{i-1}}{K_{i-1}}\times\dfrac{Y_1'(\mu_{i-1},mx_{i-1})+B_{i-1}Y_2'(\mu_{i-1,m}x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i-1,m}x_{i-1})+B_{i-1}Y_2(\mu_{i-1,m}x_{i-1})}}\times\frac{Y_1(\mu_{i,m}x_{i-1})}{Y_2(\mu_{i,m}x_{i-1})}, \quad (10)$$

i = 2,3,…n.

$$Z_1=1;\ Z_i=\frac{K_{i-1}}{K_i}\times\frac{Y_1(\mu_{i-1,m}x_{i-1})+B_{i-1}Y_2(\mu_{i-1,m}x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i,m}x_{i-1})+B_iY_2(\mu_{i,m}x_{i-1})},\ \text{i = 2,3,…n.} \quad (11)$$

Собственные функции задачи $\mu_{i,m}=\mu_{n,m}\sqrt{D_n/D_i}$ и $\mu_{n,m}$ определяются как корни трансцендентного уравнения:

$$Y_1(\mu_{n,m}x_n)+h_2Y_1'(\mu_{n,m}x_n)+B_{n,m}[Y_2(\mu_{n,m}x_n)+h_2Y_2'(\mu_{n,m}x_n)]=0,\ \text{m = 0,1,2,…} \quad (12)$$

Коэффициенты $A_m(\tau)$ при собственных функциях задачи определяются условиями ортогональности функций, которые выполняются следующим образом:

$$A_m(\tau)=-\left[\sum_{i=1}^{n}K_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_i(r,\tau)G(r)\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}r)dr\right]/\sum_{i=1}^{n}\dot{J}_i^2, \quad (13)$$

$$\psi_i(r,\tau)=\varphi_1(\tau)+\dot{\alpha}_i(\tau)\left[\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)\right]\times[\xi(r)+\dot{\beta}_i(\tau)], \quad (14)$$

$$\dot{\beta}_1(\tau)=-\left[\xi(x_0)+h_1\xi'(x_0)\right],\ \dot{\beta}_i(\tau)=\frac{D_iK_{i-1}}{D_{i-1}K_i}\times\left[\xi(x_{i-1})+\dot{\beta}_{i-1}\right]-\xi(x_{i-1}),\ \text{i = 2,3,…n} \quad (15)$$

$$\dot{\alpha}_i=\frac{D_n}{D_i}\times\frac{1}{\xi(x_n)+\dot{\beta}_n(\tau)+h_2\xi'(x_n)},\quad \text{i = 1, 2,…n.} \quad (16)$$

$$\dot{J}_i^2=K_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}G(r)\dot{F}_{i,m}^2(\mu_{i,m}r)dr. \quad (17)$$

Конкретный вид функций $\xi(r)$ и $\dot{F}_i(\mu_i r)$, а также весовая функция $G(r)$, в различных системах координат определяются выражениями:

а). Декартова (прямоугольная) система координат:

$$G(r)=1,\xi(r)=r,Y_1(\mu_i r)=\sin(\mu_i r),Y_2(\mu_i r)=\cos(\mu_i r). \quad (18)$$

б). Сферическая система координат:

$$G(r)=r^2,\xi(r)=\frac{1}{r},Y_1(\mu_i r)=\frac{1}{r}\sin(\mu_i r),Y_2(\mu_i r)=\frac{1}{r}\cos(\mu_i r). \quad (19)$$

в). Цилиндрическая система координат:

$$G(r)=r, \xi(r)=\ln r, Y_1(\mu_i r)=J_0(\mu_i r), Y_2(\mu_i r)=N_0(\mu_i r). \quad (20)$$

Следует заметить, что при решении задач для шара или цилиндра полученное решение требует ограниченности в центре шара или на оси цилиндра. Тогда для граничных условий на свободных поверхностях необходимо вместо (2) использовать другую форму записи:

$$\left[\frac{\partial C_1(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_0}=0, \quad \left[C_n(r,t)+h_2\frac{\partial C_n(r,t)}{\partial r}\right]_{r=x_n}=\varphi_2(t) \quad (21)$$

Кроме того, в общем решении вместо (9) и (14) также следует полагать:

$$B_{1,m}=0, \psi_i(r,\tau)=\varphi_2(\tau), \text{ i=1,2...n} \quad (22)$$

Остальные расчеты проводятся в соответствии с основным решением.

Выводы. В заключение отметим, что представленные выше выражения определяют общее решение уравнения нестационарной диффузии для слоистых сред при нестационарных граничных условиях третьего рода на внешней поверхности и граничных условиях сопряжения четвертого рода для соприкасающихся слоев.

На практике могут встречаться различные случаи физической и математической постановки задачи нестационарной диффузии для слоистых сред. Однако для одномерного случая различные частные решения могут быть сразу же определены с учетом условий (2), а также выражений (4), (5), (7) и (21) – (22).

Предложенная форма решения имеет явный вид и благодаря рекуррентной форме записи основных соотношений может быть полезной при численных расчетах и анализе кинетики нестационарнойдиффузии в многослойных средах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. М.: КолосС, 2010. 478 с.

2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: ООО ТИД «Альянс», 2004. 753 с.

3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчета процессов аппаратов химической технологии. СПб.: Химиздат, 2009. 544 с.

4. Романков П.Г., Фролов В.Ф. Массообменные прцессы химической технологии. Системы с дисперсной твердой фазой. Л.: Химия, 1990. 388 с.

5. Вендин С.В. К расчету нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода // ИФЖ, 1993. Т.65. №2. С. 249–251.

6. Vendin S.V. Calculation of nonstationary heat conduction in multilayer objects with boundary conditions of the third kind // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1993. Т. 65. № 2. С. 823.

7. Вендин С.В., Щербинин И.А. К решению задач нестационарной теплопроводности в слоистых средах // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2016. № 3. С. 96–99.

8. Vendin S. On the Solution of Problems of Transient Heat Conduction in Layered Media // International Journal of Environmental and Science Education. 2016. V. 11. № 18. Pp. 12253–12258.

9. Вендин С.В., Мамонтов А.Ю. Расчет мощности дополнительных источников теплоты для подогрева биомассы в биогазовом реакторе // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2017. № 7. С. 97–99.

10. Вендин С.В. К решению некоторых краевых задач нестационарной теплопроводности в слоистых средах методом разделения переменных // В сборнике: Актуальные проблемы сушки и термовлажностной обработки материалов в различных отраслях промышленности и агропромышленном комплексе сборник научных статей Первых Международных Лыковских научных чтений, посвящённых 105-летию академика А.В. Лыкова. Москва, 2015. С. 78–80.

11. Вендин С.В. Решение задачи нестационарного нагрева слоистых материалов // В сборнике:Проблемы и перспективы инновационного развития агротехнологий. Материалы XX Международной научно-производственной конференции. Майский: Белгородский ГАУ, 2016. С. 15–16.

12. Вендин С.В. Теория и математические методы анализа тепловых процессов при СВЧ обработке семян. М.: ОАО «Центральный коллектор библиотек «БИБКОМ», ООО «ТРАНСЛОГ», 2016. 143 с.

13. Vendin S.V. On Solving the Problems of Nonstationary Diffusion in Layered Environments // International Journal of Applied Engineering Research. ISSN 0973-4562. Volume 12. Number 22 (2017). Pp. 12272–12274.

14. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. Пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 550 с. ISBN 5-06-004091-7.

15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 835 с.

Информация об авторах
Вендин Сергей Владимирович, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой электрооборудования и электротехнологий в АПК. E-mail: elapk@mail.ru. Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина. Россия, 308503, Белгородская обл., Белгородский р-н, п. Майский, ул. Вавилова, д. 1.

Поступила в декабре 2018 г.

[1,]*Vendin S.V.
[1]Belgorod State Agrarian University named after V.Ya. Gorin
Russia, 308503, Belgorod Region, Belgorod District, Maysky Settlement, ul. Vavilova, d. 1
**E-mail: elapk@mail.ru*

TO THE SOLUTION OF ISSUES OF NONSTATIONARY DIFFUSION IN LAYERED ENVIRONMENTS

Abstract. *The issues of nonstationary diffusion in layered structures are considered. When designing the devices for implementing mass transfer processes, it is necessary to take into account the properties of the substance and the nature of the processes. Design time reduces significantly and the efficiency of the devices is higher if a good physical model is built and a mathematical analysis with kinetics of the processes is applied. The difficulties of theoretical analysis and calculation of mass transfer are determined by the complexity of the transfer mechanism to and from the phase boundary. Therefore, simplified models of mass transfer processes are used in which the mass transfer mechanism is characterized by a combination of molecular and convective mass transfer. Many important practical problems involve the calculation of nonstationary diffusion (Fick's second law of diffusion) for a certain volume of substance (substances). For qualitative evaluation of processes, in the case of symmetry, volumetric issues can be considered as one-dimensional tasks, i.e. dependent on one coordinate. The general solution of the non-stationary diffusion equation for layered environments is proposed. The case of non-stationary boundary conditions of the third kind on the external surface and boundary conditions of the fourth kind conjugation for contiguous layers has been considered. The solution is obtained by separating the Fourier variables by the eigenfunctions of the problem using the Duhamel integral. The proposed solution is explicit and due to the recurrent form of the basic relations can be useful in numerical calculations*
Keywords: *nonstationary diffusion, Fick's law, layered structures, nonstationary boundary conditions of the third kind, boundary conditions of conjugation of the fourth kind.*

REFERENCES

1. Rudobashta S.P., Kartashov E.M. Diffusion in chemical-technological processes. M.: KolossS, 2010, 478 p.
2. Kasatkin A.G. The main processes and apparatuses of chemical technology. M.: OOO TID "Alliance", 2004, 753 p.
3. Romankov P.G., Frolov V.F., Flisyuk OM Methods for calculating the processes of chemical technology apparatuses. SPb.: Himizdat, 2009, 544 p.
4. Romankov P.G., Frolov V.F. Mass transfer processes of chemical technology. Systems with a dispersed solid phase. L.: Chemistry, 1990. 388 p.
5. Vendin S.V. To the calculation of non-stationary heat conduction in multilayer objects with boundary conditions of the third kind. IFZH, 1993, vol. 65, no. 2, pp. 249–251.
6. Vendin S.V. There are also a number of problems in the field of thermal engineering and thermophysics, 1993, vol. 65, no. 2, pp. 823.
7. Vendin S.V., Scherbinin I.A. To solving problems of non-stationary heat conduction in layered media. Bulletin of Belgorod State Technological University V.G. Shukhov, 2016, № 3, pp. 96-99.
8. Vendin S. Conduction in Layered Media. International Journal of Environmental and Science Education, 2016, vol. 11, no. 18, pp. 12253–12258.
9. Vendin S.V., MamontovA.Yu. Calculation of the power of additional heat sources for heating biomass in a biogas reactor. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov, 2017, no. 7, pp. 97–99.
10. Vendin S.V. Towards solving some boundary problems of unsteady heat conduction in layered media by separating variables. In collection: Actual problems of drying and thermo-moisture treatment of materials in various industries and the agro-industrial complex; Lykov. Moscow, 2015, pp. 78–80.

11. Vendin S.V. Solution of the problem of non-stationary heating of layered materials. In the collection: Problems and prospects of innovative development of agricultural technologies. Proceedings of the XX International Scientific and Production Conference. Maysky: Belgorod State Agrarian University, 2016, pp. 15–16.

12. Vendin, S.V. Theory and mathematical methods for the analysis of thermal processes in the microwave treatment of seeds. M..: OJSC Central Library Collector BIBKOM, TRANSLOG LLC, 2016, 143 p.

13. Vendin S.V. International Journal of Applied Engineering Research On Solving the International. Journal of Applied Engineering Research, 2017, vol. 12, no. 22, pp. 12272–12274

14. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids: Proc. Benefit. Ed. 3rd, Pererab. and add. M.: Higher School, 2001, 550 p.

15. Korn G., Korn T. Mathematics Handbook for Scientists and Engineers. M.: Nauka, 1984, 835 p.

Information about the authors
Vendin, Sergey V. DSc, Professor. E-mail: elapk@mail.ru. Belgorod State Agrarian University. V.Ya. Gorina. Russia, 308503, Belgorod Region, Belgorod District, Maysky Settlement, ul. Vavilova, d. 1.

Received in Desember 2018

Для цитирования:
Вендин С.В. К решению задач нестационарной диффузии в слоистых средах // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2019. № 3. С. 100–105. DOI: 10.34031/article_5ca1f6340f3497.49776836

For citation:
Vendin S.V. To the solution of issues of nonstationary diffusion in layered environments. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov, 2019, no 3, pp. 100–105. DOI: 10.34031/article_5ca1f6340f3497.49776836