

DOI: 10.12737/article_5c1c995a85cd82.12056702

^{1,*}Ганджунцев М.И., ¹Филатов В.В.¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26

*E-mail: oppmgsu2014@yandex.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИН ПРИ ЗАДАНОЙ НЕРАВНОМЕРНОЙ ОСАДКЕ ТОЧЕК КОНТУРА

Аннотация. В статье предложена численная методика определения напряженно-деформированного состояния тонких изотропных пластин в результате кинематического воздействия. В качестве кинематического воздействия рассмотрено заданное смещение точек одного из опорных краев пластины. Такая постановка задачи может быть востребована, когда осадки опорного контура конструкции уже состоялись и величины их нам известны, но необходимо определить влияние неравномерности осадок на напряженно-деформированное состояние пластины. Решение дифференциальных уравнений получено с использованием обобщенных уравнений метода конечных разностей, позволяющих учитывать разрывы искомой функции, ее первой производной и правой части дифференциального уравнения. Алгоритм построен без использования законтурных точек. На примере расчета квадратной шарнирно опертой пластины проиллюстрирована простота методики и быстрая сходимость решения.

Ключевые слова: тонкие изотропные пластины, обобщенные уравнения метода конечных разностей, осадка опорного контура.

Введение. Неравномерная осадка зданий и сооружений в процессе эксплуатации может вызывать дополнительные напряжения в конструкциях. В работе [1] исследуется влияние неравномерных смещений фундаментов на работу решетчатых башен дымовых труб. В [2] рассмотрено изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций построенного здания в ходе его эксплуатации, с учетом зафиксированной на объекте разности осадок фундаментов. Анализируя опыт строительства на Юге России д.геол.-мин.н. проф. Б.Ф. Галай указывает: «что практически все аварии зданий и сооружений в регионе связаны с потерей несущей способности оснований...» [3]. В силу чего, совершенствование методик определения НДС элементов зданий и сооружений при кинематическом воздействии представляется актуальной задачей. Ниже приведена численная методика расчета изотропных пластин на заданные перемещения, в частности, точек контура. При этом кинематическое воздействие может рассматриваться как самостоятельная задача или совместно с действием внешних нагрузок.

Отметим также, что расчеты в [1] и [2] выполнялись в коммерческих программных комплексах на базе метода конечных элементов. Нами для решения задачи привлекаются обобщенные уравнения метода конечных разностей [4]. Многие авторы, обращая внимание на проблему достоверности и надежности численного решения, указывают на необходимость получения результатов различными методами [5, 6].

Методология. Дифференциальные уравнения поперечного изгиба тонкой изотропной пластины запишем в безразмерном виде [4]:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -p \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -m \quad (2)$$

где $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{a}$; $m = \frac{M}{q_0 a^2}$; $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}$;

$p = \frac{q}{q_0}$; $w = \frac{WD}{q_0 a^4}$; q_0 – интенсивность нагрузки

в какой-либо точке; μ – коэффициент Пуассона; D – цилиндрическая жесткость; a – длина одной из сторон плиты; W – прогиб. Выполнив подстановку (2) в (1) и переход к размерным величинам, получим известное дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины (103) [7].

Безразмерные изгибающие моменты определяются по известным формулам:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} &= -(w^{\xi\xi} + \mu w^{\eta\eta}); \\ m^{(\eta)} &= -(w^{\eta\eta} + \mu w^{\xi\xi}); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$; $w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$; $m^{(\xi)} = \frac{M_x}{q_0 a^2}$;

$$m^{(\eta)} = \frac{M_y}{q_0 a^2}.$$

Безразмерные поперечные силы:

$$\frac{Q_x}{q_0 a} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\partial m}{\partial \xi} = m^\xi; \quad \frac{Q_y}{q_0 a} = \frac{\partial m}{\partial \eta} = m^\eta. \quad (4)$$

Безразмерные крутящие моменты

$$m^{(\xi\eta)} = -m^{(\eta\xi)} = (1 - \mu)w^{\xi\eta}, \text{ где } w^{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1), (2) получим, как мы указывали выше,

$$\begin{aligned} & \tilde{m}_{i-1,j} + \tilde{m}_{i,j-1} - 4\tilde{m}_{ij} + \tilde{m}_{i,j+1} + \tilde{m}_{i+1,j} + \\ & + \frac{1}{2h} ({}^{I-II} \Delta m_{ij}^\xi + {}^{III-IV} \Delta m_{ij}^\xi + {}^{I-III} \Delta m_{ij}^\eta + {}^{II-IV} \Delta m_{ij}^\eta) = (5) \\ & = -\frac{1}{4} ({}^I p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{w}_{i-1,j} + \\ & + \tilde{w}_{i,j-1} - 4\tilde{w}_{ij} + \tilde{w}_{i,j+1} + \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ \tilde{w}_{i+1,j} = -\tilde{m}_{ij},$$

$$\text{где } \tilde{m} = \frac{m}{h^2}; \quad \tilde{w} = \frac{w}{h^4}; \quad (7)$$

h – шаг расчетной сетки; верхние левые индексы обозначают номер элемента примыкающего к точке i, j (рис. 1).

$$w_{ij}^{\xi\xi} = h^2 (\tilde{w}_{i-1,j} - 2\tilde{w}_{ij} + \tilde{w}_{i+1,j}) \quad w_{ij}^{\eta\eta} = h^2 (\tilde{w}_{i,j-1} - 2\tilde{w}_{ij} + \tilde{w}_{i,j+1}) \quad (8)$$

После чего по (3) – значения моментов по направлениям ξ и η .

Учет краевых условий рассмотрен в [4]. Здесь подробнее остановимся на получении разностного аналога для левого шарнирного края ($\eta=0$) при заданной осадке его точек $w_{i,0}$. Из условия $m^{(\eta)} = 0$ [4] и второго уравнения (3) следует

$$w^{\eta\eta} = -\mu w^{\xi\xi} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2) и учитывая первое выражение (8) получим

$$\tilde{m}_{i,j} = -\frac{(1-\mu)}{h^2} w^{\xi\xi} = -(1-\mu) (\tilde{w}_{i-1,j} - 2\tilde{w}_{ij} + \tilde{w}_{i+1,j}) \quad (10)$$

В качестве иллюстрации методики рассмотрим пример расчета квадратной шарнирно опертой пластины при заданной осадке ее левого

с привлечением обобщенных уравнений метода конечных разностей, хорошо себя зарекомендовавших при расчете оболочек, пластин тонких и средней толщины на статические и динамические нагрузки, а также на упругом основании [4, 8–12].

Разностные уравнения, аппроксимирующие (1) и (2) запишем по [4] на квадратной сетке для случая непрерывных m и w . Будем учитывать только разрывы распределенной нагрузки и первых частных производных m , моделирующих полосовые нагрузки

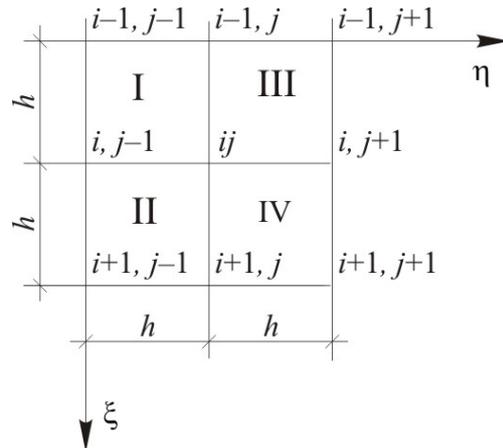


Рис. 1. Элемент, примыкающий к расчетной точке
Основная часть. Уравнения (5), (6) записываются для каждой регулярной точки совместно с уравнениями аппроксимирующими краевые условия. При этом законтурные точки не используются. Решая, полученную таким образом, систему алгебраических уравнений определяем значения \tilde{m} и \tilde{w} в каждой расчетной точке. По известным значениям прогибов вычисляются вторые частные производные

края, без выяснения причин ее вызвавших, по закону $w = w_0 \sin(\pi\xi)$ (рис.2).

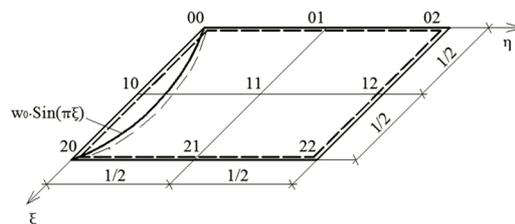


Рис. 2. Заданная осадка левого края пластины
Покажем ход решения на минимальной расчетной сетке с шагом $h = \frac{1}{2}$. Коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Примем значение перемещения в

точке 10 равным единице, тогда закон изменения осадок по левому краю примет вид $w = \sin(\pi\xi)$.

В этом случае $w_{10}^{\xi\xi} = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -9.87$. Если

осадка левого края задана не аналитически, а значениями перемещений точек края, то вторая частная производная от функции прогибов вычисляется по (8). Запишем уравнения для точки 10: по (7) $\tilde{w}_{10} = \frac{1}{0.5^4} = 16$; по (10)

$\tilde{m}_{1,0} = -\frac{(1-0.3)}{0.5^2}(-9.87) = 27.636$. Для точки 11

запишем уравнения (5) и (6), учитывая найденные значения \tilde{W}_{10} и $\tilde{m}_{1,0}$: $27.636 - 4\tilde{m}_{1,1} = 0$;

$16 - 4\tilde{w}_{1,1} = -\tilde{m}_{1,1}$. Откуда $\tilde{m}_{1,1} = 6.909$ и

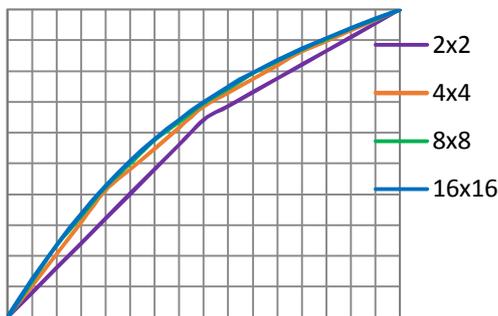
$\tilde{w}_{1,1} = 5.727$. По (7) $w_{11} = 5.727 \frac{1}{2^4} = 0.358$.

Используя (8), найдем

$$w_{1,1}^{\xi\xi} = \frac{1}{2^2}(0 - 2 \cdot 5.727 + 0) = -2.879;$$

а

w



б

m(η)

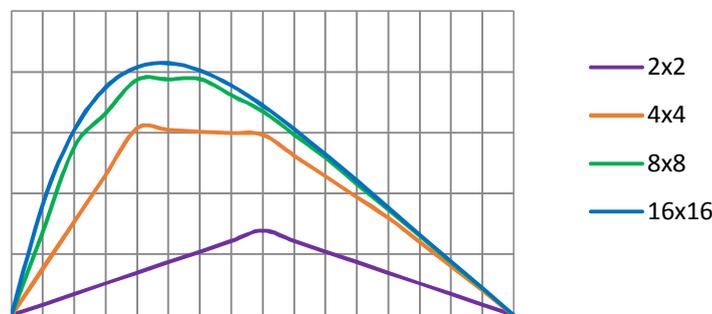


Рис. 4. Эпюры прогибов (а), изгибающих моментов в направлении ξ (б) и в направлении η (в)

Выводы. Эффективность применения обобщенных уравнений МКР при расчете балок, тонких пластин, пластин средней толщины, изотроп-

$$w_{1,1}^{\eta\eta} = \frac{1}{2^2}(16 - 2 \cdot 5.727 + 0) = 1.137. \quad \text{Значения}$$

безразмерных моментов по направлениям ξ и η вычислим по (3)

$$m_{1,1}^{\xi\xi} = -(-2.879 + 0.3 \cdot 1.137) = 2.538,$$

$$m_{1,1}^{\eta\eta} = -(1.137 - 0.3 \cdot 2.879) = -0.273. \quad \text{В точке 10}$$

$$m_{1,0}^{\xi\xi} = -(1 - \mu^2)w_{1,0}^{\xi\xi} = -(1 - 0.09)(-9.87) = 8.982.$$

На рис.3 показана рассчитываемая плита с нанесенной сеткой 16x16 и нумерацией характерных сечений.

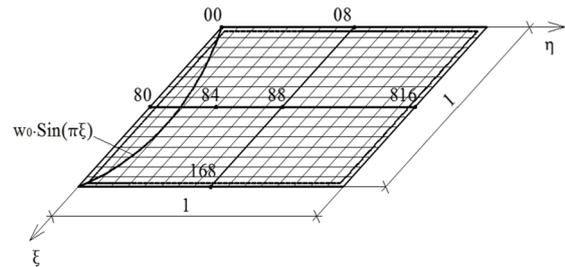


Рис. 3. Плита с сеткой 16×16

Решения, полученные на вложенных одна в другую сетках, приведены на рис. 4 а, б, в.

б

ритма, быстрая сходимость решения, возможность получения результатов при использовании простейших вычислительных средств позволяют рекомендовать методику к использованию в инженерной практике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Губанов В.В., Голиков А.В. Влияние неравномерных смещений фундаментов на работу решетчатых башен дымовых труб // Металлические конструкции. 2015. Т. 21. №4. С. 177–189.
2. Бартоломей М.Л. Численный анализ процесса развития трещин при неравномерных осадках сооружения // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. №12. С. 217–224.
3. Галай Б.Ф., Сербин В.В. Аварии зданий и сооружений, построенных на свайных фундаментах в просадочных грунтах юга России // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2014. №6. С. 20–26.
4. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. М.: АСВ. 2008. 280 с.
5. Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Онищенко Е.В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник МГСУ. 2016. №2. С. 20–33.
6. Кургузов В.Д. Численные процедуры решения геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, №4. С. 70–80.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. М.: Наука, 1966. 635 с.
8. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету плит на упругом основании // Вестник МГСУ. 2012. №4. С. 102–107.
9. Габбасов Р.Ф., Хоанг Туан Ань, Шикун М.А. Обобщенные уравнения метода конечных разностей в задачах расчета тонких изгибаемых плит на динамические нагрузки // Вестник МГСУ. 2014. №9. С. 32–38.
10. Габбасов Р.Ф., Хоанг Туан Ань. Расчет изгибаемых пластин средней толщины на динамические нагрузки с использованием обобщенных уравнений метода конечных разностей // Вестник МГСУ. 2014. №10. С. 16–23.
11. Габбасов Р.Ф., Хоанг Туан Ань, Нгуен Хоанг Ань. Сравнение результатов расчета тонких изгибаемых плит с использованием обобщенных уравнений методов конечных разностей и последовательных аппроксимаций // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №1. С. 62–64.
12. Журавлева Е.Н., Габбасов Р.Ф., Нгуен Хоанг Ань, Хоанг Туан Ань. Численное решение циклически симметричной задачи по расчету круговой цилиндрической оболочки // Промышленное и гражданское строительство. 2015. №6. С. 10–14.

Информация об авторах

Ганджунцев Михаил Иоакимович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики. E-mail: oppmgsu2014@yandex.ru. Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26.

Филатов Владимир Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры строительной и теоретической механики. Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26.

Поступила в марте 2018 г.

© Ганджунцев М.И., Филатов В.В., 2018

^{1,*}Gandjountsev M.I., ¹Filatov V.V.

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)

Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26

*E-mail: oppmgsu2014@yandex.ru

DETERMINATION OF THE STRESSED-DEFORMED STATE OF THIN BINDING PLATES UNDER THE SPECIFIED UNEVEN LOADING OF EDGE POINTS

Abstract. The paper proposes a numerical technique for determining the stress-deformed state of thin isotropic plates subjected to kinematic excitation. As a kinematic effect, a predetermined displacement of the points of one of plate's supporting edges is considered. Such a statement of the problem can be claimed when

the sediments of the supporting contour of the structure have already taken place and their values are known. It is necessary to determine the effect of sediments' unevenness on the stressed-deformed state of the plate. The solution of differential equations is obtained using generalized equations of the finite differences method, allowing to take into account the discontinuities of the required function, its first derivative and the right-hand side of the differential equation. The algorithm is constructed without the use of boundary points. On the example of calculating the square hinged plate, the simplicity of the technique and the rapid convergence of the solution are illustrated.

Keywords: *thin isotropic plates, generalized equations of finite differences method, sediment of the support contour.*

REFERENCES

1. Gubanov V.V., Golikov A.V. Influence of uneven displacements of foundations on the operation of lattice chimney towers. *Metal structures*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 177–189.
2. Bartolomey M.L. Numerical analysis of the development of cracks in the case of non-uniform sludge of the structure. *Computational mechanics of continuous media*, 2012, vol. 5, no. 12, pp. 217–224.
3. Galai B.F., Serbin V.V. Accidents of buildings and structures built on pile foundations in subsidence grounds in the south of Russia. *Bulletin of the North Caucasus Federal University*, 2014, no. 6, pp. 20–26.
4. Gabbasov R.F., Gabbasov A.R., Filatov V.V. Numerical construction of discontinuous solutions to the problems of structural mechanics. M.:ASV, 2008, 280 p.
5. Ignatiev A.V., Ignatiev V.A., Onischenko E.V. Solution of geometrically nonlinear problems of the statics of hinged-rod systems on the basis of the finite element method in the form of a classical mixed method. *Bulletin of MGSU*, 2016, no. 2, pp. 20–33.
6. Kurguzov V.D. Numerical procedures for solving geometrically nonlinear problems of mechanics of a deformable solid. *Computational technologies*, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 70–80.
7. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plates and shells*. M.: Nauka, 1966, 635 p.
8. Gabbasov R.F., Uvarova N.B. Application of generalized equations of the method of finite differences to the calculation of plates on an elastic foundation. *Bulletin of MGSU*, 2012, no. 4, pp. 102–107.
9. Gabbasov R.F., Hoang Tuan An, Shikunov M.A. Generalized equations of the method of finite differences in the problems of calculating thin bent plates for dynamic loads. *Bulletin of MGSU*, 2014, no. 9, pp. 32–38.
10. Gabbasov R.F., Hoang Tuan Anh. Calculation of bent plates of medium thickness on dynamic loads using generalized equations of the method of finite differences. *Bulletin of MGSU*, 2014, no. 10, pp. 16–23.
11. Gabbasov R.F., Hoang Tuan An, Nguyen Hoang Anh. Comparison of the results of calculating thin bent plates using generalized equations of finite difference methods and successive approximations. *Industrial and civil engineering*, 2014, vol 1, pp. 62–64.
12. Zhuravleva E.N., Gabbasov R.F., Nguyen Hoang An, Hoang Tuan Anh. Numerical solution of a cyclically symmetric problem for the calculation of a circular cylindrical shell. *Industrial and Civil Engineering*, 2015, no. 6, pp. 10–14.

Information about the authors

Gandjountsev, Michail I. PhD, Assistant professor. E-mail: oppmgsu2014@yandex.ru. Moscow State (National Research) University of Civil Engineering. Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26.

Filatov, Vladimir V. DSc, Professor. Moscow State (National Research) University of Civil Engineering. Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26.

Received in March 2018

Для цитирования:

Ганджунцев М.И., Филатов В.В. Определение напряженно-деформированного состояния тонких изгибаемых пластин при заданной неравномерной осадке точек контура // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2018. №12. С. 52–56. DOI: 10.12737/article_5c1c995a85cd82.12056702

For citation:

Gandjountsev M.I., Filatov V.V. Determination of the stressed-deformed state of thin binding plates under the specified uneven loading of edge points. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*, 2018, no. 12, pp. 52–56. DOI: 10.12737/article_5c1c995a85cd82.12056702